2º ANO
MATEMÁTICA
PADRÃO VOL. II

Direção Executiva:
Fabio Benites

Gestão Editorial:
Maria Izadora Zarro

Diagramação, Ilustração de capa e Projeto Gráfico:
Alan Gilles Mendes
Alex França
Dominique Coutinho
Erlon Pedro Pereira
Estevão Cavalcante
Paulo Henrique de Leão

Estagiários:
Amanda Silva
Fabio Rodrigues
Gustavo Macedo
Lucas Araújo

Irium Editora Ltda
Rua Desembargador Izidro,
nº114 - Tijuca - RJ
CEP: 20521-160
Fone: (21) 2560-1349
www.irium.com.br

Autores:

Biologia:	Leandro Maia
Filosofia:	Gustavo Bertoche
Física:	Wilmington Collyer
Geografia:	Duarte Vieira
História:	Montgomery Miranda / Bernardo Padula
Leitura e Produção:	Leila Noronha / Marcelo Beauclair
Língua Espanhola:	Mizael Souza
Língua Inglesa:	Jaqueline Halack
Língua Portuguesa:	Leila Noronha / Marcelo Beauclair
Literatura:	Leila Noronha / Marcelo Beauclair
Matemática:	João Luiz / Gláucio Pitanga
Química:	Wendel Medeiros
Sociologia:	Anne Nunes

Atualizações:

Biologia:	Cid Medeiros
Geografia:	Thiago Azeredo
História:	Guilherme Braga
Língua Espanhola:	Karina Paim
Química:	Renata Galdino

Apresentação:

Olá, querido aluno.

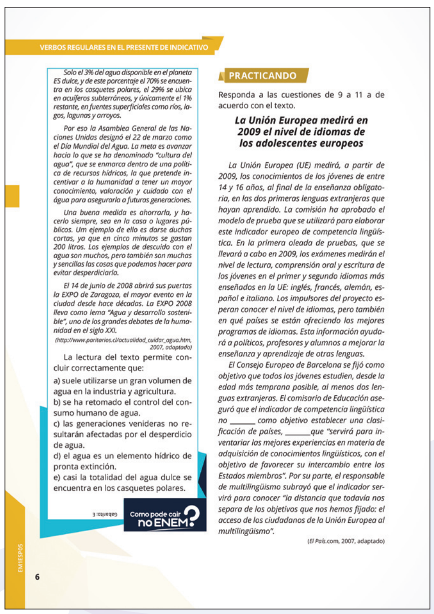
O material da **Irium Educação** foi elaborado por professores competentes e comprometidos com uma proposta de educação exigente e plural.

Neste livro, você encontrará uma teoria na medida certa, focada nas informações mais importantes hoje em dia, e **muitos exercícios** para fortalecer sua aprendizagem e preparação para os desafios futuros.

Vamos conhecer um pouco mais sobre este livro?

Todo capítulo inicia com uma capa, onde você encontrará uma imagem ilustrativa e os **objetivos de aprendizagem**. Estes resumem o que queremos que você aprenda. Quando chegar no final do capítulo, se você quiser saber se aprendeu o que é realmente importante, volte na capa e verifique se alcançou cada um dos objetivos propostos.

Antes de entrarmos na teoria, em cada capítulo, você encontrará uma **contextualização**. Ela funciona para mostrar para você porque o assunto é importante e como você poderá usar esse conhecimento no seu dia a dia.



No meio do caderno, quando estiver estudando, você encontrará inserções com informações relevantes e que “conversam” com portais da Irium Educação. É o caso do *box* **Como pode cair no ENEM?**, que trazem temas conectados ao assunto do capítulo e propõem questões do ENEM ou com o estilo da prova. Você poderá resolver os exercícios no seu caderno ou acessar o portal *comopodecairnoenem.com.br.* Lá você também encontrará todas essas questões resolvidas em vídeo.

Outra inserção interessante, que visa oferecer mais conhecimento relevante, é o **4News**. Nessa seção, será possível acessar notícias recentes que conectam o tema do capítulo com uma informação importante para a sua formação e para os diversos vestibulares. Na apostila, essas informações estão resumidas, mas poderá acessar esse conteúdo, produzido pela nossa equipe de professores, na íntegra, através do portal *4newsmagazine.com.br* ou utilizando o *QR code* inserido no *box*.

Uma das principais marcas dos livros da Irium Educação são os exercícios, que primam pela quantidade e qualidade. Para ajudar os alunos a tirarem suas dúvidas, existem inúmeras **questões com soluções gravadas em vídeo**. Elas aparecem com uma câmera e um código. Para acessar a solução, utilize o código no campo de busca no espaço destinado (videoteca) no nosso site *irium.com.br/videoteca* ou até mesmo no *Youtube*.


BIOQUÍMICA: QUAIS OS PRINCIPAIS COMPONENTES DO CORPO HUMANO?

3.2) Taxas de glicose no sangue

- O Teor de glicose no sangue é chamado de glicemia, e possui taxas normais de 40 ml de glicose / 100 ml de sangue até 100 ml de glicose / 100 ml de sangue;
- Valores abaixo = hipoglicemia; valores acima = hiperglicemia;
- Dois hormônios atuam no controle da glicemia e são produzidos no pâncreas: Insulina e Glucagon;
- A glicose é usada na respiração celular para produção de energia; o excesso é armazenado.
- Diabete melito

→ Insulino dependente = Hiperglicemia, com eliminação de glicose pela urina (“Doce”) = Glicosúria;

→ Insulino não dependente = redução da quantidade de receptores celulares de insulina e hiperglicemia = Glicosúria.

$$\text{Sangue} \underset{\text{Glucagon}}{\overset{\text{Insulina}}{\rightleftarrows}} \text{Células}$$

Teste de tolerância à glicose: é um teste de diagnóstico para diabetes. Após passar a noite em jejum, você colhe uma glicemia de jejum e recebe para beber uma solução com alta concentração de açúcar (75 g de glicose) e é colhida nova glicemia após 2 horas. O teste de tolerância oral à glicose é considerado positivo quando a glicemia fica acima de 200 mg/dl após 120 min. Normalmente, a glicose não sobe muito e retorna ao normal após duas a três horas. No diabético, a glicose sanguínea é geralmente mais alta após o jejum, sobe mais depois de ingerir a solução de glicose e leva quatro a seis horas para descer.

4NEWS

Estudo indica que adoçante eleva glicose no sangue

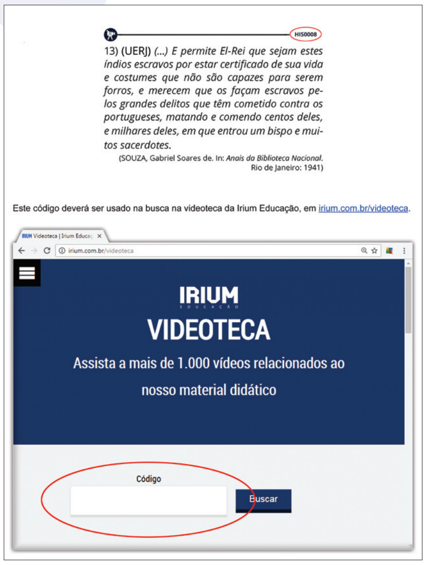
Pesquisas defendem que pessoas que consomem esses produtos regularmente podem estar colocando sua saúde em risco da mesma forma que uma pessoa obesa

Você provavelmente já passou pela seguinte situação quando pede um cafezinho: “Açúcar ou adoçante, senhor(a)?”. Bom, há algum tempo, o uso de adoçantes tornou-se popular no mundo, mas precisamente na década de 60. No Brasil, nos anos 80, estava associado aos portadores de distúrbios orgânicos, como a diabetes, e eram vendidos somente com prescrição médica. No entanto, em 1988, ocorreram mudanças na legislação e permitiram que os adoçantes passassem a ser vendidos sem prescrição e, atualmente, são consumidos por grande parte da população. Contudo, pesquisas realizadas em 2014, defendem que pessoas que consomem esses produtos regularmente, com o objetivo de perder ou evitar o ganho de peso, podem estar colocando sua saúde em risco da mesma forma que uma pessoa obesa. Saiba mais em *www.4newsmagazine.com.br.*

#OlhaaGlicose #AçúcarOuAdoçante

EM1BIO01

10


HIS0008

13) (UERJ) *(...) E permite El-Rei que sejam estes índios escravos por estar certificado de sua vida e costumes que não são capazes para serem forros, e merecem que os façam escravos pelos grandes delitos que têm cometido contra os portugueses, matando e comendo centos deles, e milhares deles, em que entrou um bispo e muitos sacerdotes.*

(SOUZA, Gabriel Soares de. In: *Anais da Biblioteca Nacional*. Rio de Janeiro: 1941)

Este código deverá ser usado na busca na videoteca da Irium Educação, em irium.com.br/videoteca.

Além dos exercícios tradicionais, de concursos, propomos uma atividade mais experimental no final de cada capítulo. Na seção **Pesquisando**, você encontrará uma proposta de reflexão e/ou pesquisa com o intuito de tornar o aprendizado teórico mais prático e concreto. Essa atividade poderá ser usada para seminários e apresentações, de acordo com a agenda pedagógica da escola.

Para finalizar, que tal encontrar um conteúdo ideal para aquelas revisões na véspera de provas e concursos? Essa é a proposta da seção **Resumindo**, na última página de cada capítulo. Aqui, você encontrará uma síntese com as principais informações do capítulo, como as fórmulas mais importantes, que você não pode esquecer.

A equipe da Irium Educação acredita em uma formação **exigente**, **completa** e **divertida**. Esperamos que este livro possa proporcionar isso a você.

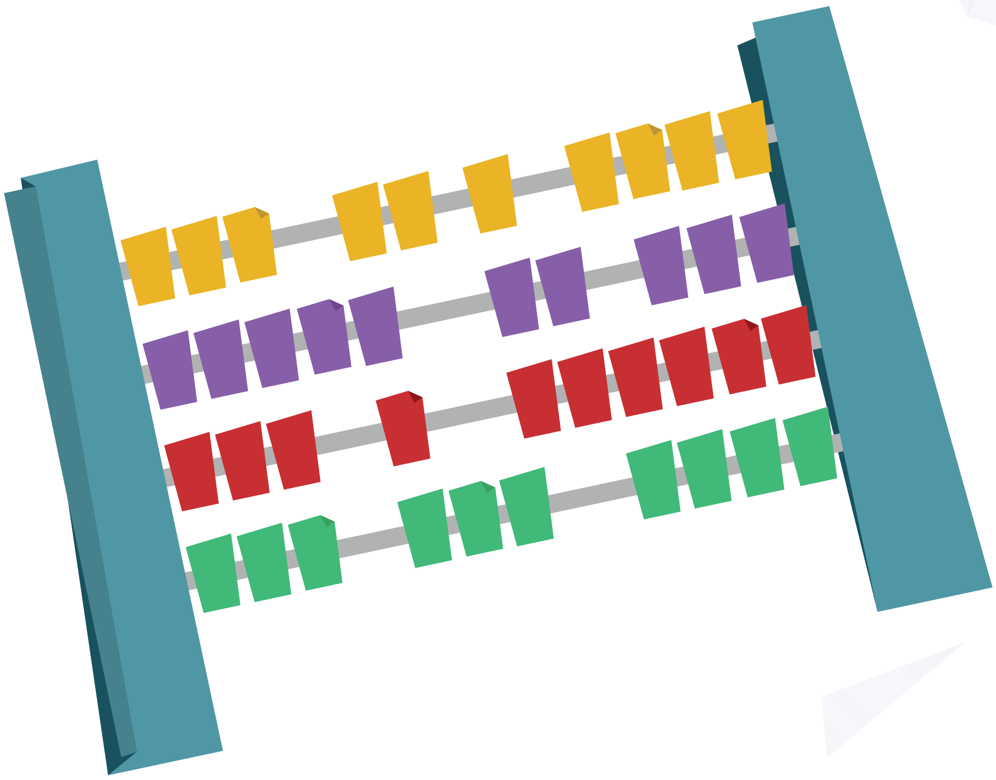
#vamboraaprender

“A Educação é a arma mais poderosa
que você pode usar para mudar o mundo.”

(Nelson Mandela)

Fabio Benites

Diretor-geral



MATEMÁTICA

2º ANO

VOLUME II

SUMÁRIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA: APRENDENDO A FAZER DIVERSOS TIPOS DE CONTAGEM

(Disponível em: www.istockphoto.com/br.
Acesso em: janeiro de 2017)

Objetivos de aprendizagem:

- Assimilar a importância do processo de tomada de decisões e princípios multiplicativos;
- Apresentar a operação fatorial e o seu funcionamento;
- Introduzir o Princípio Fundamental da Contagem como base para a Análise Combinatória;
- Estabelecer os conceitos de permutação, arranjo e combinação, bem como suas restrições;
- Aplicar as ferramentas desenvolvidas em problemas contextualizados e atuais.

Mega-sena

(Disponível em: https://www.google.com.br/search?q=mega-sena+rico&espv=2&biw=1242&bih=535&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiurOKcg_PPAhUHG5AKHVSbAWcQ_AUIDCgA#tbm=isch&q=mega-sena+rico+quadrinhos&imgrc=-8h9KV4QXIaFdM%3A. Acesso em: janeiro de 2017)

Quem nunca quis ganhar na mega-sena? Você já deve ter ouvido alguma vez que esse tipo de jogo paga milhões de reais para o vencedor e basta uma aposta mínima para concorrer. Parece muito simples, não é, mas você já parou para pensar que existem muitas possibilidades de se fazer um jogo? Não? Então venha nesse mundo da análise combinatória e descubra algumas técnicas de contagem.

1) Análise combinatória: fatorial

Fatorial de um número natural n > 1 é o produto de todos os números naturais de 1 até n.

$$\begin{cases} n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \,.\, 1 \\ 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Exemplo:

$5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$

$5! = 5 \,.\, 4!$

$5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3!$

Por que $0! = 1$ e $1! = 1$?

Podemos escrever $n! = n\,(n-1)!$

Fazendo n = 2

$2! = 2(2-1)!$

$2 \,.\, 1 = 2 \,.\, 1!$

$1! = 1$

Fazendo n = 1

$1! = 1(1-1)!$

$1! = 1 \,.\, 0!$

$0! = 1$

Operações:

Exemplo:

$$\frac{13! + 12!}{11!} = \frac{13 \,.\, 12 \,.\, 11! + 12 \,.\, 11!}{11!} = \frac{11!(13 \,.\, 12 \,. + 12)}{11!} = 168$$

Exemplo:

$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,[(n+1)\,n - n]}{(n-1)!} = n^2 + n - n = n^2$$

Exemplo 3:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12 \rightarrow \frac{(n+1)\,n\,(n-1)!}{(n-1)!} = 12$$

$n^2 + n - 12 = 0$

$n' = 3$

$n'' = -4$ (F) $\qquad S = \{ 3 \}$

PRATICANDO

1) Calcule:

a) $\frac{7!+4!-3!}{6!}$

b) $\frac{4!-2!-0!}{1!}$

c) $\frac{11!}{9!}$

2) Simplifique as expressões:

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ b) $\frac{n!-(n+1)!}{n!}$

3) Calcule:

a) $\frac{100!+99!}{98!}$ b) $\frac{12!+11!+10!}{12!-11!-10!}$

4) Sendo $n \neq 0$, o(s) valor(es) de n tal que:

$$\frac{[(n+1)!-n!]}{(n-1)!} = 7n$$

a) 7
b) 0 e 7
c) 0 e 10
d) 1
e) 0 e 2

2) Análise combinatória: Princípio Fundamental da Contagem

Se um acontecimento é composto de duas fases sucessivas, independentes entre si, sendo que a fase pode ocorrer de m modos, e a 2ª fase pode ocorrer de n modos, então o número de maneiras distintas de ocorrer esse acontecimento é m.n.

Logo, em um acontecimento composto de p fases teremos:

$M = m_1.m_2.m_3. \ldots .m_p$ maneiras.

Exemplo:

Num hotel, existem 3 portas de entrada que dão no saguão principal que possui 5 elevadores. Um hóspede deve se dirigir ao 7º andar utilizando-se de um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

1ª Fase (Entrar no hotel)	*2ª Fase (usar o elevador)*
Porta 1	*Elevador 1*
Porta 2	*Elevador 2*
Porta 3	*Elevador 3*
	Elevador 4
	Elevador 5

nº de possibilidades para a 1ª fase = 3
nº de possibilidades para a 2ª fase = 5
total de possibilidades 3 . 5 = 15

Logo, o hóspede poderá chegar ao 7º andar de 15 maneiras diferentes.

Observação

Em caso de condição estabelecida no enunciado do problema, esta será satisfeita primeiro.

Exemplo:

Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 4, 5, 7 e 9?

Condição → número par. Então o último algarismo deve ser par. Logo, o último algarismo deve ser o 2 ou o 4, ou seja 2 possibilidades. Nas outras casas teremos 5 possibilidades e 4 possibilidades, uma vez que os algarismos devem ser distintos.

$\underline{4} \times \underline{5} \times \underline{2} = 40$ *números*

Como artesanato e combinatória pode cair no ENEM?

MAT0234

A prática com peças manipuláveis de artesanato é frequentemente abordada por professores para reforçar conteúdos de matemática. Uma simples permutação de elementos pode gerar novos modelos ou formatos. Na questão a seguir podemos reforçar um mecanismo que nos possibilita fazer a contagem de todas as variações possíveis dentro das restrições do problema.

(ENEM) No nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura a seguir:

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Gabarito: B

Como pode cair no ENEM?

PRATICANDO

5) Numa eleição de uma escola há três candidatos a presidente, cinco a vice-presidente, seis a secretário e sete a tesoureiro. Quantos podem ser os resultados da eleição?

6) Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

7) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números de quatro algarismos distintos. Dentre eles, quantos são divisíveis por 5?

8) Com os algarismos 1, 2, 3 e 7, sem repeti-los, podemos escrever "x" números maiores que 2700. Determine x.

3) Análise Combinatória: Arranjos

3.1) Arranjos simples

Seja A um conjunto com n elementos. Um arranjo simples dos n elementos de A, tomados p a p é qualquer subconjunto ordenado, sucessão de A, contendo p elementos.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo:

Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 5, 8 e 9, sem repeti-los?

• *Inventando-se a ordem dos algarismos, obtemos um novo número.*

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\neq}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$

Logo, o problema é de arranjo.

$$A_{6,3} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

Podemos formar 120 números.

Observação

Em geral podemos utilizar o PFC para resolvermos questões de arranjo, principalmente se existir uma condição no enunciado.

Como formação de conselho pode cair no ENEM?

MAT0236

Uma comissão pode ser formada com pessoas com mesmas funções (cargos) ou por pessoas com funções diferentes. Teremos uma combinação quando trocarmos as pessoas de função e definirmos grupos distintos. Obviamente, se as pessoas possuem mesmo cargo não haverá mudanças na comissão ao trocar as funções, caracterizando assim um Arranjo.

O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas, das quais uma é o presidente deste conselho. A diretoria do sindicato tem quatro cargos a serem preenchidos por membros do conselho, sendo que o presidente da diretoria e do conselho não devem ser a mesma pessoa. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?

a) 40
b) 7920
c) 10890
d) 11!
e) 12!

Gabarito: C

Como pode cair no ENEM?

PRATICANDO

9) Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9?

10) Quatro amigos vão ao cinema e escolhem, para sentar-se, uma fila em que há seis lugares disponíveis. Sendo n o número de maneiras como poderão sentar-se, o valor de n/5 é igual a:
a) 72
b) 58
c) 36
d) 24

11) (UNIRIO) Uma família formada por 3 adultos e 2 crianças vai viajar num automóvel de 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Sabendo-se que só 2 pessoas podem dirigir e que as crianças devem ir atrás e na janela, o número total de maneiras diferentes através das quais estas 5 pessoas podem ser posicionadas, não permitindo crianças no colo de ninguém, é igual a:
a) 120
b) 96
c) 48
d) 24
e) 8

12) (UNIFICADO) Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?
a) 69
b) 2024
c) 9562
d) 12144
e) 13824

4) Análise Combinatória: permutações e anagramas

4.1) Permutação simples

Seja A um conjunto com n elementos. Permutação simples de n elementos é qualquer arranjo simples desses n elementos tomados n a n.

$$P_n = n!$$

Exemplo:

Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados, usando-se os algarismos 1, 3, 5 e 7?

nº de 4 algarismos $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 4!$

$P_4 = 4! = 24$

Logo, podem ser formados 24 números.

Observação

Anagrama é qualquer palavra, com significado ou não, que podemos formar, com as letras de uma palavra dada.

Exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra "BEIJO"?
Beijo tem 5 letras, logo:
$P_5 = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$
Podem ser formados 120 anagramas.

4.2) Permutação com elementos repetidos

Seja A um conjunto com n elementos, onde o elemento k aparece α vezes. Desse modo o número de permutações distintas é dado por:

$$P_n^{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!}$$

Observação

Para mais de um elemento repetido teremos:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,...} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!...}$$

Exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra "PATA"?
A letra "A" é repetida duas vezes, logo:

$$P_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 . 3 . 2!}{2!} = 12$$

Podem ser formados 12 anagramas.

Exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra "ARARA"?
A letra "A" aparece 3 vezes
A letra "R" aparece 2 vezes

$$logo: P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 . 4 . 3!}{3! . 2} = 10$$

Podem ser formados 10 anagramas.

Como sorteios pode cair no ENEM?

MAT0238

Muitas são as situações de sorteios em que os números relacionados a cada pessoa são estabelecidos através de certa ordem. Dentro de uma amostra de possíveis números, um será sorteado aleatoriamente de acordo com as restrições de cada situação. No problema a seguir, veremos um modo prático de organização desses números.

(ENEM) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é:

a) 24
b) 31
c) 32
d) 88
e) 89

Gabarito: E

Como pode cair no ENEM?

PRATICANDO

13) Quanto aos anagramas da palavra ENIGMA, calcule:
a) o número total deles.
b) o número dos que terminam em A.
c) o número dos que começam com EN.

14) De quantos modos podemos ordenar 2 livros de matemática, 3 de português e 5 de física, de modo que os livros de uma mesma matéria fiquem sempre juntos e, além disso, os de física fiquem, entre si, sempre na mesma ordem?

15) Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras da palavra ARAMADO, de modo que a letra R ocupe sempre o último lugar?

4.3) Permutação circular

Chamamos de permutação circular a disposição dos elementos de um conjunto ao redor de um círculo. Para determinarmos o número de disposições possíveis, utilizamos a expressão abaixo:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo: *Para uma foto de recordação da escola, André, Beatriz, Cláudio, Davi, Ênio e Fátima formaram uma roda.*

Quantas formações diferentes são possíveis?

Começamos nosso pensamento formando qualquer arrumação com elas. Pode ser A, B, C, D, e E e isso significa a permutação de 6 elementos, ou seja 6!. Entretanto percebemos que ABCDEF, BCDEFA, CDEFAB, DEFABC, EFABCD e FABCDE são 6 modos de escrever a mesma roda. Então dividimos 720 por 6 e encontramos 120 modos. Usando a fórmula:

$$PC_6 = (6-1)! = 5! = 120 \text{ modos}$$

Exemplo: *De quantos modos podemos pintar uma pirâmide pentagonal regular usando 6 cores diferentes sendo cada face de uma cor?*

Pintar a base $\rightarrow$ *6 possibilidades*

Pintar as laterais $\rightarrow$ *permutação circular de 5 cores. Então:*

$$6 . PC_5 = 6 . (5-1)! = 6 . 4! = 6 . 24 = 144 \text{ modos}$$

PRATICANDO

16) Quantos colares podemos formar usando quatro contas, todas diferentes?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 12

17) Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

18) Na *TV Minas* há um programa de entrevistas, chamado *Roda Viva*. Os entrevistadores sentam-se em volta de uma grande roda e o entrevistado senta-se no centro da roda em uma cadeira giratória. Dos oito entrevistadores do próximo programa: dois serão da *Folha de S.Paulo*, dois da *Veja* e dois de *O Canal*.

Sabendo-se que os jornalistas serão dispostos em torno da roda de modo que colegas de trabalho permaneçam juntos, quantas disposições serão possíveis?

19) Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

5) Análise Combinatória: combinações simples

Seja A um conjunto com n elementos. Uma combinação simples dos n elementos de A, tomados p a p é qualquer **subconjunto não ordenado** de A, contendo p elementos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo: *Quantas comissões distintas, constituídas de 3 pessoas, podem ser formadas com 6 pessoas, pertencentes a diretoria de uma empresa.*

Invertendo-se a ordem das pessoas, obtemos a mesma comissão.

$$\boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{=}\ \boxed{C}\ \boxed{B}\ \boxed{A}$$

Logo, o problema é de combinação.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{\cancel{6} . 5 . 4 . \cancel{3!}}{3! . 3!} = 20$$

Podemos formar 20 combinações.

Exemplo:

Uma empresa é formada por 4 sócios brasileiros e 3 americanos. De quantos modos podemos formar uma diretoria de 5 sócios sendo 3 brasileiros e 2 americanos?

a) Nº de possibilidade de grupos de 3 brasileiros a partir de 4.

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!\,.\,1!} = 4$$

b) Nº de possibilidade de grupos de 2 americanos a partir de 3.

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!\,.\,1!} = 3$$

total de possibilidades = $E_1 . E_2 = 4 . 3 = 12$

(P. F. C.) Podemos formar 12 diretorias.

6) Análise combinatória: combinações completas

Combinações completas de n elementos, de k a k, são combinações de k elementos não necessariamente distintos.

Em vista disso, quando vamos calcular as combinações completas devemos levar em consideração as combinações com elementos distintos (combinações simples) e as combinações com elementos repetidos.

Exemplo:

Quantas soluções naturais têm a equação $x + y + z = 7$?

Convencionaremos um tipo especial de notação para cada solução da equação dada.

Por exemplo:

• *Se x=1, y = 2 e z = 4, a solução (1, 2, 4) será representada por ●/●●/●●●●*

• *Se x=2, y = 0 e z = 5, a solução (2, 0, 5) será representada por ●●//●●●●●*

• *Se x=0, y =0 e z = 7, a solução (0, 0, 7) será representada por //●●●●●●●*

Em que os sinais / servem para separar as incógnitas e a quantidade de sinais ● agrupados indicam o valor de cada incógnita.

Observe que nesse tipo de notação usamos o símbolo ● (repetido 7 vezes) e o símbolo / (repetido 2 vezes) e que a cada permutação desses 9 elementos corresponde a uma única solução e vice-versa.

Como cada unidade é representada por ● e os dois sinais / são escritos entre dois dos quaisquer 7 sinais ●, nossa maneira de escrever 7, na notação convencionada, como soma de três inteiros positivos, será colocando o sinal / sempre entre duas das seis posições possíveis. Portanto, os sinais / só poderão ser colocados em duas das seis posições. Então temos $C_{6,2}$ = 15 modos diferentes.

Observação

Se o problema pedisse as soluções inteiras positivas da equação, o zero estaria excluído e não poderíamos ter, na notação convencionada, símbolos / justapostos ou em alguma extremidade da representação.

Como ilustrar publicações pode cair no ENEM?

MAT0241

A seleção de figuras é uma situação que muitas crianças já passaram na infância e algumas provas de vestibular gostam de abordar questões que envolvam essa escolhas de figuras ou cards. Como no modelo a seguir, no qual veremos como calcular o total de grupos que se pode formar ao selecionar algumas figuras.

(UERJ) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007. Um desses grupos está apresentado a seguir.

Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente.

Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

a) 24 c) 70
b) 35 d) 140

Gabarito: B

Como pode cair no ENEM?

PRATICANDO

20) De quantos modos podemos escolher 5 sorvetes em uma sorveteria que oferece 3 sabores distintos?

21) (MACKENZIE) Dentre os anagramas distintos que podemos formar com n letras, das quais somente duas são iguais, 120 apresentam estas duas letras iguais juntas. O valor de n é:

a) 4 d) 7
b) 5 e) 122
c) 6

22) (MACKENZIE) O número de comissões diferentes, de 2 pessoas, que podemos formar com os n diretores de uma firma, é k. Se, no entanto, ao formar estas comissões, tivermos que indicar uma das pessoas para presidente e a outra para suplente podemos formar k + 3 comissões diferentes. Então, n vale:

a) 3 d) 30
b) 10 e) 40
c) 13

4 NEWS

A legalização dos jogos de azar

A concessão da exploração de jogos de azar será sempre precedida de licitação

Sem fazer alarde, a Comissão Especial do Desenvolvimento Nacional do Senado aprovou o projeto que legaliza a exploração comercial de jogos de azar em todo o território nacional. O texto inclui modalidades como jogo do bicho, bingos, apostas eletrônicas, jogos praticados em cassino, sweepstake (aposta em cavalos), entre outros.

Quer saber mais sobre o tema? Então, visite a nossa página *www.4newsmagazine.com.br*

#legalizaçãodosjogos #seliga

APROFUNDANDO

23) (UFF) O produto 20. 18. 16. 14 ... 6. 4. 2 é equivalente a:

a) $\frac{20!}{2}$

b) $2.10!$

c) $\frac{20!}{2^{10}}$

d) $2^{10}.10!$

e) $\frac{20!}{10!}$

24) (UNIFICADO) Se an = $\frac{(n+1)!-n!}{n^2[(n-1)!+n!]}$, então a 1997 é:

a) 1997/1996
b) 1/1998
c) 1998!
d) 1997
e) 1

25) Se $\frac{x!\,(x+1)!}{(x-1)!\,x!} = 20$, então x vale:

a) –6
b) –5
c) 4
d) 5
e) 6

MAT0233

26) (UFF) Considere a equação:

$$\frac{6.12.18.24.....300}{50!} = 216^n$$

O valor de n, real, que verifica essa igualdade é:

a) 1/3
b) 3/2
c)15/2
d) 25/3
e) 50/3

27) Usando-se os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, existem x números de 4 algarismos, de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais. O valor de x é:

a) 505
b) 427
c) 120
d) 625
e) 384

28) Uma idosa foi retirar sua aposentadoria em um caixa automático, mas se esqueceu da senha. Lembrava que não havia o algarismo 0, que o primeiro algarismo era 8, o segundo era primo, o terceiro era menor que 5 e o quarto e último era ímpar e maior que 3. Qual o maior número de tentativas que ela pode fazer no intuito de acertar a senha?

29) O número de múltiplos de três, com quatro algarismos distintos, escolhidos entre 3, 4, 6, 8 e 9 é:

a) 24
b) 36
c) 48
d) 72
e) 96

30) Ana dispunha de papéis com cores diferentes. Para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas de modo a não usar a mesma cor no papel e na fita, em nenhuma das 30 embalagens.

A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou utilizar para a confecção de todas as embalagens foi igual a:

a) 30
b) 18
c) 6
d) 3

31) (ENEM) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir:

Grupos taxonômicos	Números de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Catáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

(*T&C Amazônia*, ano 1, n.º 3, dez./2003.)

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

a) 1.320
b) 2.090
c) 5.845
d) 6.600
e) 7.245

32) (ENEM) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\frac{62^6}{10^6}$

b) $\frac{62!}{10!}$

c) $\frac{62!4!}{10!56!}$

d) $62! - 10!$

e) $62^6 - 10^6$

33) (ENEM) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa.

O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas;
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

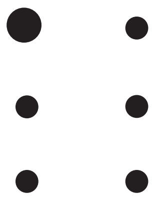
34) (UFF) Uma fábrica produz três modelos de carros. Para cada modelo o cliente deve escolher entre sete cores diferentes, cinco tipos de estofamento e vidros brancos ou verdes. Além disso, o cliente pode adquirir, opcionalmente, o limpador do vidro traseiro. A quantidade de maneiras distintas que essa fábrica pode montar carros para atender a todas as possíveis escolhas de seus clientes é:

a) 60
b) 70
c) 140
d) 210
e) 420

35) Considere formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtêm permutando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. O número 75391 ocupa, nessa disposição, o lugar:

a) 21º
b) 64º
c) 88º
d) 92º
e) 120º

36) (ENEM) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

a) 12
b) 31
c) 36
d) 63
e) 720

37) (ENEM) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

a) 14
b) 12
c) 8
d) 6
e) 4

38) (UFF) Em um sofá de 3 lugares irão sentar-se uma criança, uma moça e um rapaz, sendo que a criança sempre irá sentar-se no lugar do meio. De quantas maneiras diferentes 5 crianças, 5 rapazes e 5 moças poderão sentar-se no sofá?

39) (UFRJ) Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor. Determine o número de possibilidades diferentes de pintura.

MAT0235

40) (UFRJ) A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, cada um dos quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições:

a) Se o primeiro algarismo é ímpar, então o último algarismo também é ímpar;
b) Se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro;
c) A soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.

Quantas combinações diferentes atendem às condi-ções estabelecidas pelo Dr. Z?

41) (UFRJ) As antigas placas de automóveis, com duas letras seguidas de quatro algarismos, foram substituídas por novas, com três letras seguidas de quatro algarismos. Nestas placas, bem como nas antigas, são utilizadas as 23 letras do alfabeto português, mais as letras K, W e Y.

Calcule quantos carros a mais podem ser emplacados com o novo sistema.

42) Determine quantos são os números de três algarismos, múltiplos de 5, cujos algarismos das centenas pertencem a {1,2,3,4} e os demais algarismos a {0,5,6,7,8,9}.

MAT0237

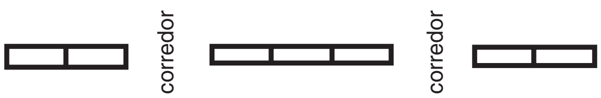
43) (UERJ) Numa cidade, os números telefônicos não podem começar por zero e têm oito algarismos, dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo.

Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são 0000 e que o prefixo da farmácia Viva vida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nesta ordem.

O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

a) 6
b) 24
c) 64
d) 168

44) Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura abaixo.



Os modos de João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 10
e) 12

45) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários, aproximadamente:

a) 100 dias;
b) 10 anos;
c) 1 século;
d) 10 séculos;
e) 100 séculos.

46) Quantos anagramas têm as palavras:

a) GATAS
b) GUANABARA

47) Numa estante existem 3 livros de História, 3 de Matemática e 1 de Geografia. Caso se deseje sempre um livro de História em cada extremidade, então o número de maneiras de se arrumar esses 7 livros é:

a) 720
b) 36
c) 81
d) 126
e) n.d.a.

48) (UFF) Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos x anagramas que começam por vogal e y anagramas que começam e terminam por consoante.

Os valores de x e y são, respectivamente:

a) 48 e 36
b) 48 e 72
c) 72 e 36
d) 24 e 36
e) 72 e 24

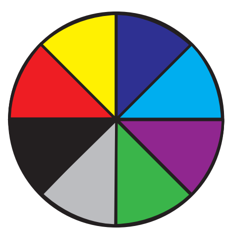
49) (UFF) Cinco casais vão-se sentar em um banco de 10 lugares, de modo que cada casal permaneça sempre junto ao sentar-se. Determine de quantas maneiras distintas todos os casais podem, ao mesmo tempo, sentar-se no banco.

MAT0239

50) (UFF) Três ingleses, quatro americanos e cinco franceses serão dispostos em fila (dispostos em linha reta) de modo que as pessoas de mesma nacionalidade estejam sempre juntas.

De quantas maneiras distintas a fila poderá ser formada de modo que o primeiro da fila seja um francês?

51) De quantos modos diferentes o disco ao lado pode ser pintado com 8 cores diferentes?



MAT0240

52) (UFRJ) Um grupo constituído por 4 mulheres e 4 homens deve ocupar as 8 cadeiras dispostas ao redor de uma mesa circular. O

grupo deve ser acomodado de modo que cada homem sente entre duas mulheres. João e Maria estão nesse grupo de pessoas; entretanto, por ordem estritamente pessoal, não podem sentar-se lado a lado. Duas acomodações das pessoas ao redor da mesa são consideradas diferentes quando pelo menos uma das pessoas não tem o mesmo vizinho à direita, nas duas acomodações.

Determine o número de diferentes acomodações possíveis dessas 8 pessoas ao redor da mesa circular.

53) O gerente da “Carrusado Veículos” planeja realizar uma exposição dos dez automóveis da loja, dispondo-os em círculo de modo que os automóveis vizinhos guardem a mesma distância um do outro.

A frota da loja é composta por 2 modelos da marca H (um movido a álcool e um a gasolina), 3 modelos da marca K (um movido a álcool e dois a gasolina) e 5 modelos da marca W (dois movidos a álcool e três a gasolina). Por decisão do gerente, os veículos movidos por um mesmo combustível devem ficar juntos.

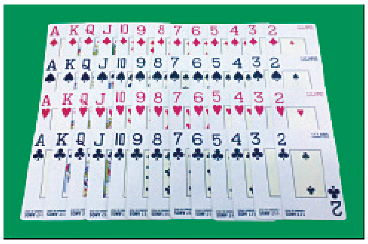
O número de maneiras distintas de organizar esses veículos, de acordo com a decisão do gerente, é dado por:

a) (4!)(6!)
b) (2!)(4!)(6!)
c) (3!)(5!)
d) (2!)(3!)(5!)

54) (PUC) Numa primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

55) (UERJ) Na ilustração a seguir, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.



Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:

O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

a) 624
b) 676
c) 715
d) 720

56) (UFF) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza.

Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante a sua estada.

O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

a) 8
b) 24
c) 56
d) 112
e) 336

57) (UFF) Dispondo de 10 questões de Álgebra e 5 de Geometria, uma banca deseja preparar provas, de forma que cada uma contenha uma questão diferente das demais. Sabe-se que cada prova deverá conter 5 questões de Álgebra e 3 de Geometria, determine quantas provas podem ser preparadas.

58) (UFF) Um piano de brinquedo possui sete teclas, que emitem sons distintos entre si, correspondentes as sete notas musicais da pauta. Se forem pressionadas, ao mesmo tempo, no mínimo três e no máximo seis teclas, o total de sons diferentes que podem ser obtidos é:
a) 21
b) 28
c) 42
d) 63
e) 98

59) (UFF) A administração de determinado condomínio é feita por uma comissão colegiada formada de 8 membros: síndico, subsíndico e um conselho consultivo composto de seis pessoas. Note que há distinção na escolha de síndico e subsíndico enquanto não há esta distinção entre os membros do conselho consultivo.

Sabendo que 10 pessoas se dispõem a fazer parte de tal comissão, determine o número total de comissões colegiadas distintas que poderão ser formadas com essas 10 pessoas.

60) (UFRRJ) Deseja-se formar comissões de 5 pessoas de um grupo de 5 homens e 6 mulheres. Quantas comissões serão formadas se, em cada uma, haverá, no máximo, uma mulher?

61) (FUVEST) Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo 4 itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?
a) 360
b) 420
c) 540
d) 600
e) 640

62) (UNIRIO) O bufê de saladas de um restaurante apresenta alface, tomate, agrião, cebola, pepino, beterraba e cenoura.

Quantos tipos de saladas diferentes podem ser preparados com cinco desses ingredientes, de modo que todas as saladas contenham alface, tomate e cebola?
a) 4
b) 12
c) 8
d) 3
e) 6

MAT0242

63) (UERJ) Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- Um dentre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;
- Um dentre os tamanhos: pequeno e grande;
- De um até cinco dentre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:
a) Quantos sanduíches distintos podem ser montados.
b) O número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

64) (ITA) O número de soluções inteiras, maiores ou iguais a zero, da equação $x + y + z + w = 5$ é:
a) 36
b) 48
c) 52
d) 54
e) 56

DESAFIANDO

65) De quantos modos três casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?

PESQUISANDO

Um dos jogos mais conhecidos é o pôquer. No pôquer existe um tipo de “mão” chamada flash, quando o jogador junta cinco cartas do mesmo naipe.

Considerando o baralho completo, de quantas formas diferentes é possível fazer um Flash?

RESUMINDO

- Fatorial de um número natural é o produto de todos os números de 1 até n: N! = n . (n – 1) . (n – 2)... 2.1;
- O Princípio Fundamental da Contagem diz que para determinar de quantas maneiras distintas um acontecimento de n fases, por exemplo, pode ocorrer, basta multiplicar a quantidade de modos que cada fase pode ocorrer;
- Arranjo é o conjunto com n elementos onde se desejam formar grupos ordenados de p elementos: A(n, p) = n! / (n – p)!;
- Permutação Simples é um arranjo simples de todos os elementos tomados n a n, podendo ser calculado através do fatorial de n: P_n = n!;
- Anagrama é uma palavra com significado ou não formada ao permutar todas as letras de uma palavra escolhida;
- Permutação com repetição é um arranjo simples de todos os elementos tomados n a n, mas onde há termos repetidos, por exemplo, a e b, fazendo com que a fórmula seja: $P_n^{a,b}$ = n! / a!b!;
- Permutação circular é o arranjo de um conjunto de n elementos ao redor de um círculo ou circunferência: PC = n!/n = (n – 1)!;
- Combinação é o conjunto com n elementos onde se desejam formar grupos não ordenados de p elementos: $C_{n,p}$ =n! / p!(n – p)!.

GEOMETRIA ESPACIAL: COMO ESTUDAR POLIEDROS, PRISMAS E PIRÂMIDES?

(Disponível em: https://mochilana.files.wordpress.com/2015/07/3-pirc3a2mides-reproduc3a7c3a3o-de-foto-da-internet.jpg. Acesso em: outubro de 2016)

Objetivos de aprendizagem:

- Compreender a definição de poliedro, sua classificação e a aplicação da relação de Euler;
- Reconhecer prismas e calcular suas áreas da base, lateral, total e volume, inclusive de paralelepípedo e cubo;
- Reconhecer pirâmides e calcular suas áreas da base, lateral, total e volume, inclusive do tetraedro regular;
- Resolver problemas envolvendo poliedros, prismas e pirâmides.

Pirâmides de Gizé

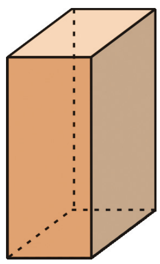
(Disponível em: https://i.ytimg.com/vi/hdOZu40UBvg/maxresdefault.jpg. Acesso em: outubro de 2016)

Uma das mais imponentes construções é a pirâmide que abriga o corpo do Rei Queóps, maior das três pirâmides de Gizé e única das maravilhas do mundo antigo ainda existente. Tal construção foi feita por volta de 2500 a.C por 100.000 homens que trabalharam durante 20 anos na construção da pirâmide. Tal fato ainda intriga muitos estudiosos e fascinam construtores do mundo todo.

Vamos então mergulhar nesse mundo da geometria espacial e aprender alguns conceitos que foram utilizados pelos antigos egípcios.

1) Poliedros

Poliedro é o sólido limitado por polígonos planos que têm, dois a dois, um lado comum.



Exemplo:

V = número de vértices = 8

F = números de faces = 6

A = número de arestas = 12

fn = nº de faces do gênero n

Vn = nº de vértices onde concorrem n arestas

Os polígonos são denominados faces do poliedro.

Os lados e os vértices dos polígonos denominam-se, respectivamente, arestas e vértices do poliedro.

Observação

A nomenclatura dos poliedros é dada de acordo com o número de faces. Por exemplo, o sólido acima possui 6 faces, logo ele é chamado de hexaedro.

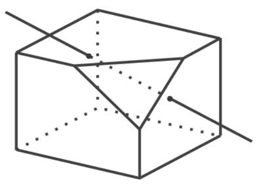
O poliedro será dito convexo quando:

• A superfície desse sólido é formada somente por partes planas, sendo essas partes (faces) polígonos convexos;

• Duas faces nunca estão no mesmo plano;

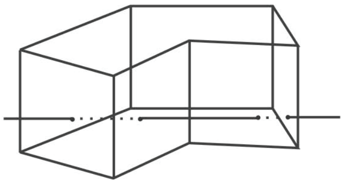
• Cada aresta está contida somente em duas faces;

• O plano de cada face deixa o sólido todo num mesmo lado.



Convexo

EM2MAT06



Não convexo

1.1) Poliedros regulares

Um poliedro convexo recebe o nome de poliedro regular se somente se:

• Todas as suas faces têm o mesmo número n de arestas;

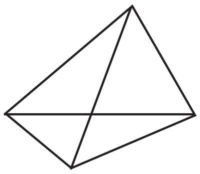
• Cada vértice é extremidade do mesmo número n de arestas;

• Todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes.

Os 5 poliedros regulares existentes são:

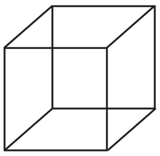
• Tetraedro Regular.

Possui 4 faces, todas são triângulos equiláteros.



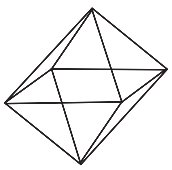
• Hexaedro Regular (Cubo).

Possui 6 faces, todas são quadradas.



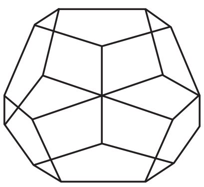
• Octaedro Regular.

Possui 8 faces, todas são triângulos equiláteros.



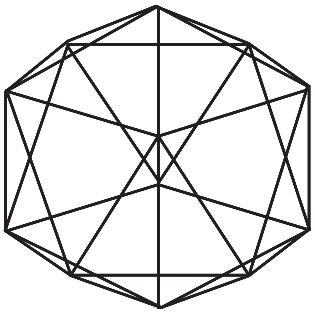
• Dodecaedro Regular.

Possui 12 faces, todas são pentágonos regulares.



• Icosaedro regular.

Possui 20 faces, todas são triângulos equiláteros.



1.2) Relação de Euler (poliedros convexos)

$$V + F = A + 2$$

Onde: V é o número de vértices.
F é o número de faces.
A é o número de arestas.

Observação

Qualquer poliedro que satisfaz a relação acima é chamado de poliedro eureliano. Entretanto, nem todo poliedro convexo é eureliano.

Exemplo: *Determine o número de arestas e de vértices de um poliedro convexo que possui 6 faces quadrangulares e quatro faces triangulares.*

$F = 6 + 4 = 10$

$A = ?$

Faces quadrangulares $= 6 \times 4 = 24/2 = 12$

Faces triangulares $= 4 \times 3 = 12/2 = 6$

$A = 12 + 6 = 18$

$V + F = A + 2$

$V + 10 = 18 + 2$

$\boxed{V = 10}$

EM2MAT06

Observação

$$\text{Número de arestas} = \frac{\text{número de lados dos polígonos}}{2}$$

1.3) Soma dos ângulos de todas as faces (poliedros convexos)

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Onde: V é o número de vértices.

Exemplo: *No exemplo anterior, determine a soma dos ângulos de todas as faces.*

$S = (V - 2) \cdot 360$

$S = (10 - 2) \cdot 360$

$S = 8 \cdot 360 = 2880°$

1.4) Número de diagonais do poliedro

$$D = \frac{V(V-1)}{2} - A - \Sigma d_f$$

Onde Σd_f é a soma das diagonais de todas as faces.

Observação

Lembrar que $d_f = \frac{n(n-3)}{2}$ representa o número de diagonais de cada face

Exemplo$_3$: *Quantas diagonais possui um hexaedro?*

No hexaedro podemos observar 8 vértices (V = 8), 12 arestas (A = 12) e 6 faces quadrangulares (F = 6).

Fazendo $d_f = \frac{n(n-3)}{2}$ *com as 6 faces quadrangulares, ou seja n = 4 , encontraremos df = 2 x 6 faces, ou seja, 12 diagonais. Então:*

$$D = \frac{8(8-1)}{2} - 12 - 12 = 4 \text{ diagonais}$$

Como **formação de cristais** pode cair no ENEM?

MAT0190

É imensurável a quantidade de obras clássicas da Matemática que citam poliedros e suas estruturas, o que nos remetem a própria origem do mundo. Diversas são as formas poliédricas que podemos encontrar na natureza, sejam em estruturas mais simples ou em estruturas mais complexas. Reconhecimento de sólidos geométricos e estruturas poliédricas é um tema bastante explorado. Suas estruturas e composições sempre podem ser temas de questões.

(UNIFICADO) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

a) 35
b) 34
c) 33
d) 32
e) 31

Gabarito: D

Como pode cair no ENEM?

PRATICANDO

1) (PUC) Se um poliedro convexo possui 16 faces triangulares, o seu número de vértices é:

a) 24
b) 20
c) 16
d) 12
e) 10

2) Em um poliedro convexo de 20 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Determine o número de faces do poliedro.

3) Um poliedro convexo tem faces pentagonais e faces quadrangulares. Se a soma das medidas dos ângulos de todas as faces é 4680° e ele tem 25 arestas, quantas faces tem de cada tipo?

4) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então, o número de faces triangulares é:
a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

2) Prismas

Sólido obtido após interligarmos os vértices correspondentes de dois polígonos congruentes que se encontram em planos paralelos, distintos, com segmentos de reta de medida k.

Observação

1) A distância entre os planos paralelos que contêm as bases do prisma é chamada altura do prisma.
2) Se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, o prisma é classificado como "prisma reto".
3) Caso as arestas laterais sejam oblíquas aos planos das bases, o prisma é classificado como "prisma oblíquo".

2.1) Nomenclatura

Os prismas são designados observando-se o gênero do polígono nas suas bases.

Exemplo:

Base → triângulo → Prisma triangular
Base → quadrilátero → Prisma quadrangular
Base → hexágono → Prisma hexagonal

Observação

O que podemos calcular em um prisma:
a) Área da base (A_B) → é a área de uma das regiões poligonais formadoras (bases) do prisma.
b) Área lateral (A_L) → é a soma das áreas de todas as faces laterais de um prisma.
c) Área total (A_T) → é a soma das áreas de todas as faces de um prisma, ou seja:

$$\boxed{A_T = A_L + 2A_B}$$

2.2) Volume

O volume de um prisma é dado pelo produto da área da base pela altura.

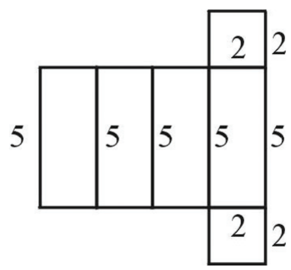
$$V = A_B \cdot h$$

Observação

Para que isso aconteça é necessário que a área da base seja constante durante toda altura.

Exemplo: *Dado um prisma reto de base quadrangular regular, cuja altura é h = 5 m e cuja aresta da base mede 2 m, calcule:*
a) Área da base
b) Área lateral
c) Área total
d) Volume

Resolução:



Planificando o prisma temos:

a) A_B → *quadrado de lado 2*
$A_B = L^2 = 2^2 = 4\ m^2$

b) A_L → *quatro retângulos de medidas 2 x 5*
$A_L = 4 \times 2 \times 5 = 40\ m^2$

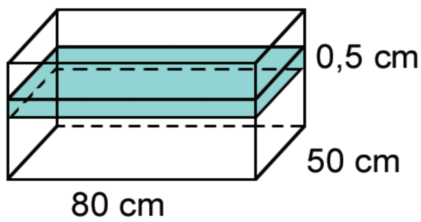
c) $A_T = A_L + 2A_B$
$A_T = 40 + 8$
$A_T = 48\ m^2$

d) $V = A_B \times h$
$V = 4 \times 5$
$V = 20\ m^3$

Exemplo: *Um aquário em forma de prisma reto, de altura 50 cm e base retangular horizontal com lados medindo 80 cm e 50 cm, contém água até um certo nível. Após a imersão total de uma pedra decorativa nesse aquário, o nível da água subiu 0,5 cm sem que a água entornasse. Determine o volume dessa pedra.*

Resolução:

ATENÇÃO → Volume do corpo = volume do líquido deslocado



$V_{corpo} = A_B . h$

$V_{corpo} = 80 . 50 . 0,5$

$V_{corpo} = 2000 \text{ cm}^3$

Como volume de uma piscina pode cair no ENEM?

MAT0192

Problemas envolvendo piscinas são bastante recorrentes em provas de vestibulares e na grande maioria das vezes são associadas a prismas quadrangulares denominados paralelepípedos. O cálculo do seu volume, bem como o da área de sua superfície e transformações de unidades de medidas são exemplos de como Paralelepípedos podem ser abordados.

(UFF) Uma piscina tem a forma de um prisma reto cuja base é um retângulo de dimensões 15 m e 10 m. A quantidade necessária de litros de água para que o nível de água da piscina suba 10 cm é:

a) 0,15 L

b) 1,5 L

c) 150 L

d) 1.500 L

e) 15.000 L

Gabarito: E

Como pode cair no ENEM?

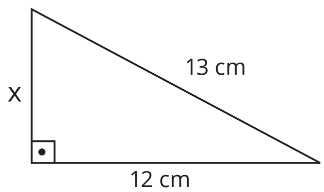
PRATICANDO

5) Um prisma pentagonal regular tem 20 cm de altura. A aresta da base do prisma mede 4 cm. Determine a sua área lateral.

6) Num prisma quadrangular regular, a aresta da base mede a = 6 m. Sabendo que a área lateral do prisma é 216 m², calcule a medida h da altura do prisma.

7) Calcule a área da base, a área lateral e a área total de um prisma reto que tem 6 cm de altura e cuja base é um hexágono regular que tem 2 cm de aresta.

8) Um prisma reto tem por base um triângulo retângulo cujas medidas estão indicadas na figura.

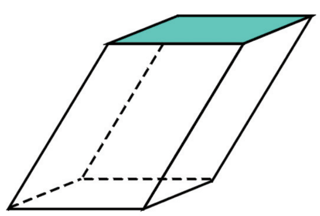


Sabendo que a altura do prisma mede 10 cm, calcule sua área total.

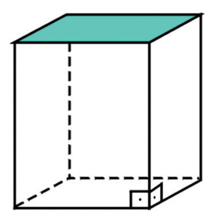
3) Prismas: paralelepípedo e cubo

3.1) Paralelepípedo

Prisma onde todas as faces são paralelogramos.

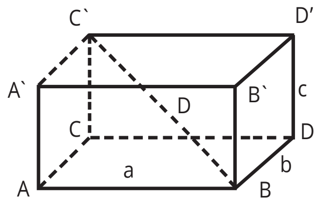


(paralelepípedo oblíquo)



(paralelepípedo reto)

Prisma de faces retangulares. Suas dimensões são chamadas de comprimento, largura e altura.



3.1.1) Área da base

$A_B = ab$

3.1.2) Área lateral

$A_L = 2bc + 2ac$

3.1.3) Área total

$A_T = A_L + 2A_B$

$A_T = 2bc + 2ac + 2ab$

$A_T = 2(ab + ac + bc)$

3.1.4) Volume

$V = A_B \times h$

$V = abc$

3.1.5) Diagonal (D)

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Exemplo: *Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões 3 cm, 4 cm e 6 cm, determine:*

a) Área total

b) Volume

c) Diagonal

a) $A_T = 2\,(ab + ac + bc)$

$A_T = 2\,(3 \times 4 + 3 \times 6 + 4 \times 6)$

$A_T = 2\,(12 + 18 + 24)$

$A_T = 108\ cm^2$

b) $V = a \times b \times c$

$V = 3 \times 4 \times 6$

$V = 72\ cm^3$

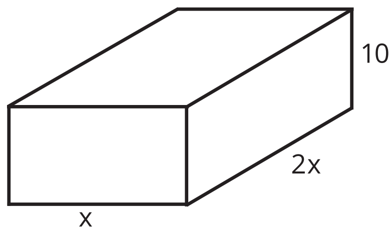
c) $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$D = \sqrt{3^2 + 4^2 + 6^2}$

$D = \sqrt{9 + 16 + 36}$

$\boxed{D = \sqrt{61}\ cm}$

Exemplo: *Num paralelepípedo retângulo, o comprimento é o dobro da largura e a altura é 10 cm. Sabendo-se que a área total é 216 cm², determine o volume desse sólido.*



$A_T = 2\,(ab + ac + ab)$

$A_T = 2\,(2x^2 + 20x + 10x)$

$216 = 2\,(2x^2 + 30x)$

$2x^2 + 30x - 108 = 0$

$x^2 + 15x - 54 = 0$

$\boxed{x' = 3}$

$x'' = -18$ (F)

$a = x = 3\ cm$

$b = 2x = 6\ cm$

$c = 10\ cm$

logo: $V = a\,.\,b\,.\,c$

$V = 3\,.\,6\,.\,10$

$\boxed{V = 180\ cm^3}$

3.2) Cubo

Paralelepípedo retângulo de faces quadradas.

3.2.1) Área da Base

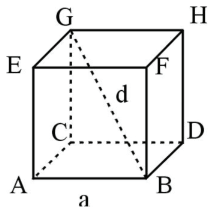
$A_B = a^2$

3.2.2) Área Lateral

$A_L = 4a^2$

3.2.3) Área Total

$$A_T = A_L + 2A_B$$



$$A_T = 6a^2$$

3.2.4) Volume

$$V = A_B \times h$$

$$V = a^3$$

3.2.5) Diagonal (d)

$$d = a\sqrt{3}$$

Exemplo: *Dado um cubo de aresta igual a 4 cm, determine:*

a) Área total
b) Volume
c) Diagonal

a) $A_T = 6a^2$

$\boxed{A_T = 6 \times 4^2}$

$A_T = 96\ cm^2$

b) $V = a^3$

$\boxed{V = 4^3}$

$V = 64\ cm^3$

c) $d = a\sqrt{3}$

$\boxed{d = 4\sqrt{3}\ cm}$

Exemplo₂: *Aumentando em 1 cm a aresta de um cubo, a área de uma face aumenta em 7 cm². Qual a área total e o volume do cubo?*

$(a + 1)^2 - a^2 = 7$

$a^2 + 2a + 1 - a^2 = 7$

$2a = 6$

$\boxed{a = 3\ cm}$

a) $A_T = 6a^2$

$\boxed{A_T = 54\ cm^2}$

b) $V = a^3$

$V = 3^3$

$\boxed{V = 27\ cm^3}$

Como fabricação de chocolate pode cair no ENEM?

MAT0194

Chocolate é a grande paixão da maioria das pessoas, porém torna-se um vilão para os que lutam contra a balança. Barras de chocolates normalmente são comercializadas em formatos cúbicos ou de paralelepípedos que são sempre lembrados em questões que envolvem cálculo volumétrico.

(ENEM) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

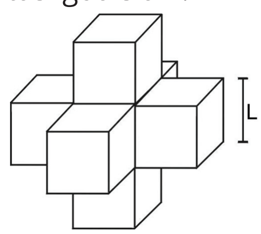
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 12 cm
d) 24 cm
e) 25 cm

Gabarito: B

Como pode cair no ENEM?

PRATICANDO

9) (UFF) O sólido abaixo representado possui todas as arestas iguais a L.

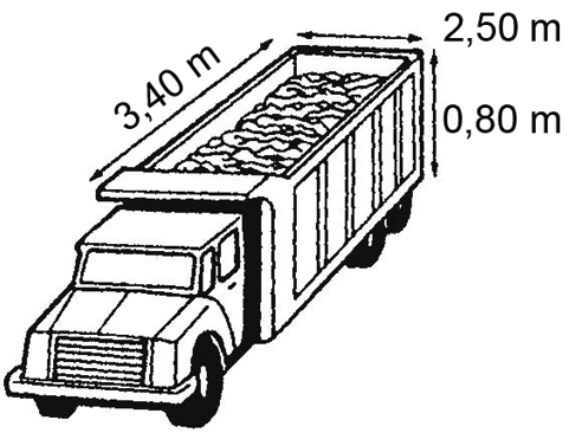


Sabendo-se que todos os ângulos entre duas faces adjacentes são retos, pode afirmar-se que o seu volume é:

a) $7L^3$
b) $9L^3$
c) $11L^3$
d) $19L^3$
e) $27L^3$

10) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são 12 cm, 10 cm e 4 cm. Calcule a área total, o volume e a diagonal desse paralelepípedo.

11) Um caminhão basculante tem a carroceria com as dimensões indicadas na figura.



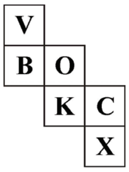
Calcule quantas viagens deverá fazer para transportar 136 m³ de areia.

12) (UNIRIO) Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo tem 8 m de comprimento, 6 m de largura e 3 m de profundidade. Um nadador que estava totalmente submerso na piscina verificou que, ao sair, o nível da água baixou 0,5 cm. O volume do nadador, em dm³, é igual a:

a) 480
b) 360
c) 300
d) 240
e) 120

13) (UERJ) Dobrando-se a planificação abaixo, reconstuíremos o cubo que a originou.

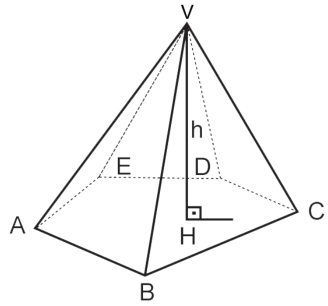
A letra que fica na face oposta à que tem um X é:



a) V
b) O
c) B
d) K

4) Pirâmides

Sólido convexo em que há uma face (base) num determinado plano e apenas um vértice fora desse plano. Suas faces laterais são representadas por triângulos.



Elementos.
vértice – **V**
base – **ABCDE**
vértices da base – **A, B, C, D e E**
arestas laterais – **VA, VB, VC, VD e VE**
arestas da base – **AB, BC, CD, DE e EA**
altura – **VH (h)**

Observação

H é a ***projeção ortogonal*** do vértice sobre o plano da ***base.***

4.1) Pirâmide regular

Uma pirâmide é regular quando a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro desta. Em uma pirâmide regular, as arestas laterais são iguais e as faces laterais são triângulos isósceles iguais.

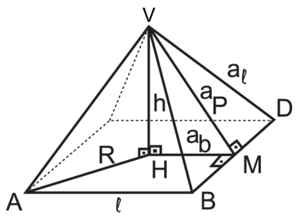
O apótema do polígono regular da base é chamado **apótema da base.**

As arestas laterais são congruentes e sua medida será indicada por a_e.

As faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

A altura de uma face lateral (é a altura relativa à base de um triângulo isósceles) é chamada **apótema** da pirâmide.

4.2) Elementos



Destacaremos os seguintes elementos em uma pirâmide regular:

AB : aresta da base (e)

VA : aresta lateral (al)

VH : altura (h)

VM : apótema da pirâmide (ap)

HM : apótema da base (ab)

HA : raio da circunferência circunscrita à base (R)

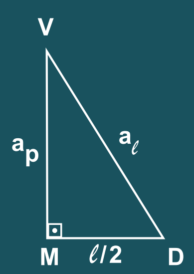
Área Lateral – S_L

Área da base – S_B

Área Total – $S_T = S_L + S_B$

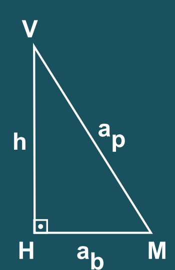
Observação

ΔVMD



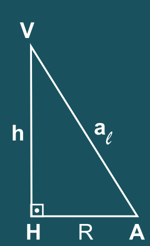
$$a_l^2 = a_p^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

ΔVHM



$$a_p^2 = a_b^2 + h^2$$

ΔVHA



$$a_l^2 = R^2 + h^2$$

As pirâmides regulares mais conhecidas têm bases triangulares, quadrangulares ou hexagonais.

4.2.1) Apótema da Base

Base triangular $L\sqrt{3}/6$

Base quadrangular $L/2$

Base hexagonal $L\sqrt{3}/2$

4.2.2) Área da Base

Base triangular $L^2\sqrt{3}/4$

Base quadrangular: L^2

Base hexagonal $3L^2\sqrt{3}\ /\ 2$

4.2.3) Área lateral

Base triangular $3L\text{x}a_p/2$

Base quadrangular $4L\text{x}a_p/2$

Base hexagonal $6L\text{x}a_p/2$

4.3) Volume

Todo prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares equivalentes.

Podemos concluir que um prisma equivale a três pirâmides que têm a mesma base e a mesma altura dele.

O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura, ou seja:

$$V = \frac{1}{3} . A_b . h$$

Exemplos:

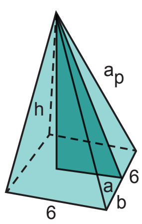
Dada uma pirâmide de base quadrangular regular cuja aresta da base mede 6 cm e altura igual a 4 cm, calcule:

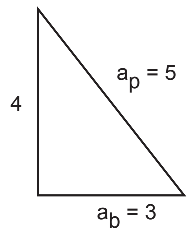
a) área da base

b) área lateral

c) área total

d) volume





Resolução:

Aresta da base = 6cm

Altura = 4 cm

Apótema da pirâmide = $\boxed{5\text{ cm}}$

a) $A_B = 6^2 = 36\text{ cm}^2$

b) $A_L = 4.\dfrac{b.h}{2}$

$A_L = 4.\dfrac{6.5}{2}$

$\boxed{A_L = 60\text{ cm}^2}$

c) *área total* $\rightarrow A_T = A_L + A_B$

$$A_T = 60 + 36$$

$$\boxed{A_T = 96\ cm^2}$$

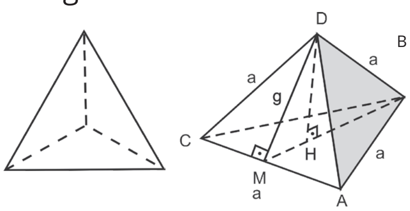
d) *Volume* $\rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4$$

$$\boxed{V = 48\ cm^3}$$

4.4) Tetraedro

A pirâmide de base triangular é chamada tetraedro. Quando todas as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, ele é chamado tetraedro regular.



4.4.1) Altura do tetraedro regular

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

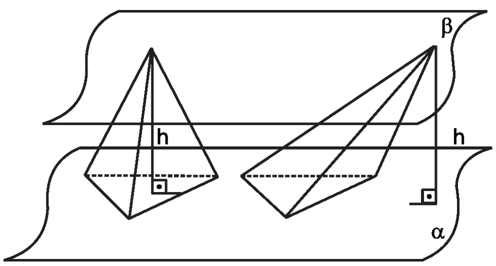
4.4.2) Área total do tetraedro regular

$$AT = a^2\sqrt{3}$$

4.4.3) Volume do tetraedro regular

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

4.5) Princípio de Cavallieri



Ao deslocarmos o vértice de uma pirâmide sobre o plano que contém seu vértice e é paralelo à sua base, não alteramos o seu volume.

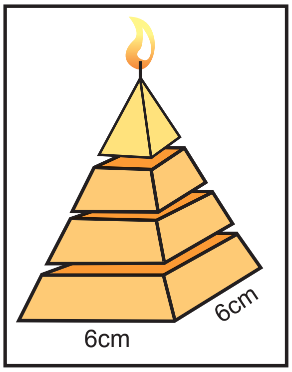
Como vela de parafina pode cair no ENEM?

BIO0003

Usadas em decoração ou como aromatizantes, as velas artesanais possuem formatos de sólidos geométricos conhecidos pela suas características poliédricas. Cubos, paralelepípedos, cilindros, cones, pirâmides e esferas ganham formas nos moldes encontrados para comercialização. Muitas questões gostam de explorar o cálculo do custo para a fabricação de determinadas velas artesanais.

(ENEM) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura. Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3
b) 189 cm^3
c) 192 cm^3
d) 216 cm^3
e) 540 cm^3



Gabarito: B

Como pode cair no ENEM?

4 NEWS

Colapso do turismo no Egito esvazia praias e pirâmides

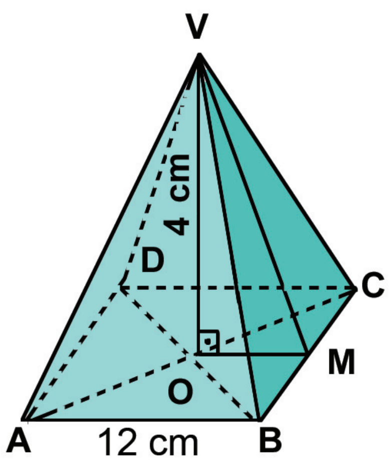
O país busca a estabilização para voltar a figurar fortemente no cenário turístico mundial

O Egito sempre foi o destino mais buscado por viajantes da África ao Oriente Médio. Mas os recentes acontecimentos que geraram instabilidade no país provocaram também a queda nesse fluxo turístico. Vamos ver os impactos disso em nosso portal *www.4newsmagazine.com.br.*

#TurismoMumificado

PRATICANDO

14) Considere a pirâmide quadrangular regular indicada na figura a seguir.

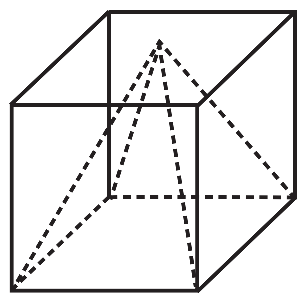


Calcule:

a) a medida do apótema da base;
b) a medida do apótema da pirâmide;
c) a medida da aresta lateral;
d) a área total da pirâmide;
e) o volume.

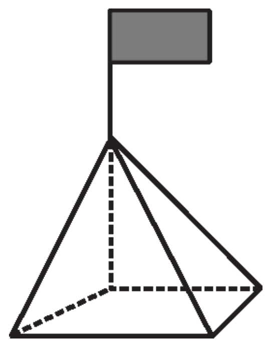
15) (UNIRIO) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura a seguir. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m³, então o volume do cubo, em m³, é igual a:

a) 9
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21



16) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura. Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m³) necessário para a construção da pirâmide será:

a) 36
b) 27
c) 18
d) 12
e) 4



APROFUNDANDO

17) Um hexágono regular está inscrito numa circunferência cujo raio mede 4 cm. Se esse hexágono é base de uma pirâmide reta, cuja altura mede 2 cm, então a área lateral dessa pirâmide, em cm^2, é:
a) 20
b) 36
c) 40
d) 48
e) 60

18) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais.

19) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O número de vértices do poliedro é:
a) 80
b) 60
c) 50
d)48
e) 38

20) Uma pirâmide que tem soma dos ângulos de todas as faces 2880º é uma pirâmide:
a) hexagonal;
b) ortogonal;
c) decagonal;
d) eneagonal;
e) n.d.a.

21) (PUC) Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas pentagonais. Então, o número de faces n_f, o número de arestas n_a e o número de vértices n_v do poliedro são:
a) $n_f = 7$ $n_a = 10$ $n_v = 12$
b) $n_f = 5$ $n_a = 9$ $n_v = 12$
c) $n_f = 7$ $n_a = 15$ $n_v = 10$
d) $n_f = 5$ $n_a = 9$ $n_v = 12$
e) $n_f = 7$ $n_a = 10$ $n_v = 15$

MAT0191

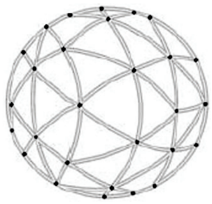
22) (UNIFICADO) Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. O número de vértices desse poliedro é de:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

23) (UNIFICADO) Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:
a) 16
b) 18
c) 24
d) 30
e) 44

24) (UNIFICADO) Considere o poliedro regular, de faces triangulares, que não possui diagonais. A soma dos ângulos das faces desse poliedro vale, em graus:
a) 180
b) 360
c) 540
d) 720
e) 900

25) (UERJ) Considere o icosaedro a seguir, construído em plástico inflável cujos vértices e pontos médios de todas as arestas estão marcados.

A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro. Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências, como ilustrado a seguir:



Observe agora que, substituindo-se esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica.

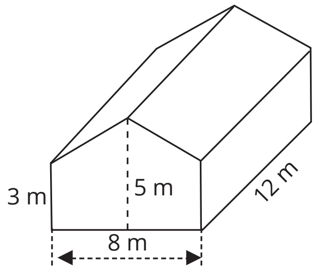
O número de arestas dessa estrutura é igual a:
a) 90
b) 120
c) 150
d) 180

26) Uma embalagem de chocolate tem a forma de um prisma reto, cuja base é um hexágono regular. A altura da embalagem mede 10 cm e cada aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm. Calcule o volume dessa embalagem.

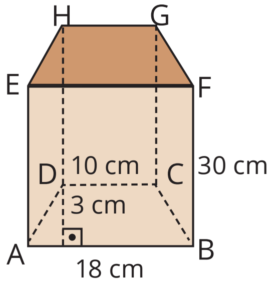
MAT0193

27) (CESCEA) O volume do prisma hexagonal regular, de altura $\sqrt{3}$ cm e cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm, é:
a) 18 cm^3
b) $6\sqrt{3}$ cm^3
c) 3 cm^3
d) $\sqrt{3}$ cm^3

28) Calcule o volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura a seguir.

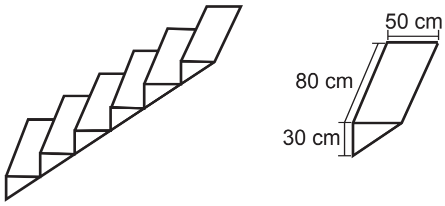


29) Considere o prisma reto da figura cuja base é um trapézio isósceles.



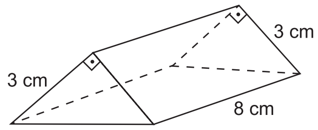
Calcule:
a) a área da base;
b) a área lateral;
c) a área total;
d) o volume.

30) (UFRRJ) Para construir seis degraus ligando dois planos de um terreno (figura abaixo), o proprietário faz um levantamento de preço e constata que o metro cúbico do concreto que ele utilizará custa R$ 250,00. Para preencher todos os degraus da escada, seriam gastos:



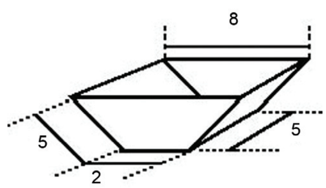
a) R$ 300,00
b) R$ 90,00
c) R$ 150,00
d) R$ 200,00
e) R$ 30,00

31) Uma fábrica de chocolates está fazendo barrinhas na forma de um prisma reto triangular cujas dimensões estão indicadas na figura seguinte.



Sabendo que a massa de 1cm^3 de chocolate é de aproximadamente 1,3 gramas, determine o número máximo de barrinhas desse tipo que é possível fabricar com 1 quilograma de chocolate.

32) Um tanque de uso industrial tem a forma de um prisma cuja base é um trapézio isósceles. Na figura a seguir, são dadas as dimensões, em metros, do prisma. Calcule o volume desse tanque.

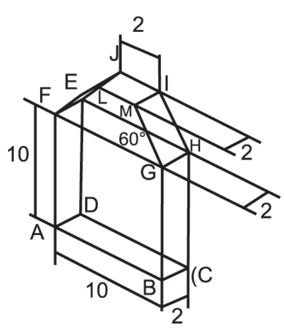


33) Um reservatório tem a forma de um prisma reto retangular e mede 0,50 m de largura, 1,20 m de comprimento e 0,70 m de altura. Estando o reservatório com certa quantidade de água, coloca-se dentro dele uma pedra com forma irregular, que fica totalmente coberta pela água. Observa-se, então, que, o nível da água sobe 1 (um) cm. Isto significa que o volume da pedra é de:

a) 0,6 m³
b) 6 m³
c) 6 dm³
d) 60 dm³
e) 600 cm³

34) (UFF) A figura abaixo representa um prisma reto, sendo **ABGF** um quadrado e **FGML** um trapézio isósceles em que o ângulo $\hat{G}$ mede 60°.

Calcule o volume do sólido.

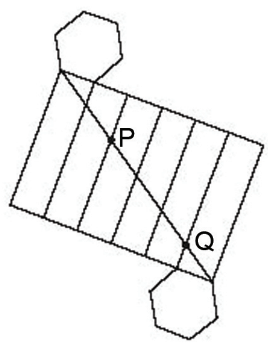


35) Suponha que o bolo mostrado na tira a seguir apoie-se sobre um suporte circular feito de chocolate que, por sua vez, encontra-se sobre uma mesa de madeira de tampo retangular, cujas dimensões são 0,90 m de comprimento, 0,80 m de largura e 0,02 m de espessura. Assim, a parte dura que o Cebolinha mordeu diz respeito apenas a um pedaço do tampo da mesa.

(Jornal *O Estado de S. Paulo*. 13/10/01)

Se o pedaço de madeira na fatia tem a forma de um prisma regular triangular, cuja aresta da base mede 6 cm, qual o seu volume?

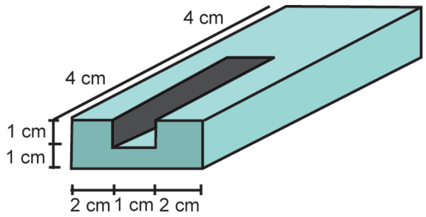
36) (UFRJ) A figura abaixo corresponde à planificação de um prisma regular hexagonal de altura 2a e perímetro da base igual a 3a. Determine a distância entre os pontos P e Q no prisma.



37) A soma das arestas de um paralelepípedo reto retângulo é 48 m. Calcule o seu volume, sabendo-se que as dimensões são números inteiros consecutivos.

38) (UFRJ) Uma pedra de massa 25 kg tem a forma de um paralelepípedo com 2 cm de espessura. Sua base é um quadrado com 1 m de lado. Qual a massa de uma outra pedra, do mesmo material, que tem a forma de um paralelepípedo com 2 m de comprimento, 80 cm de largura e 3 cm de espessura?

39) (UNIRIO) Na fabricação da peça mostrada a seguir, feita de um único material que custa R$ 5,00 o cm^3, deve-se gastar a quantia de:

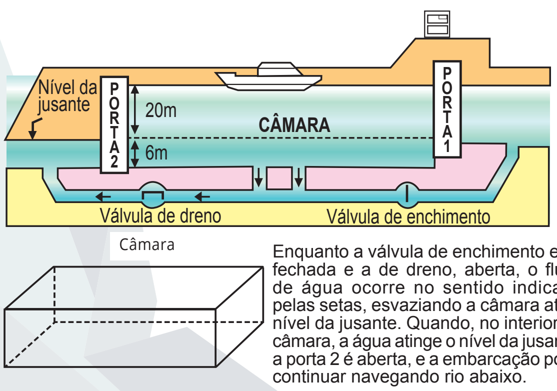


a) R$ 400,00
b) R$ 380,00
c) R$ 360,00
d) R$ 340,00
e) R$ 320,00

40) (MACKENZIE) Dispondo-se de uma folha de cartolina medindo 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode construir-se uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de 8 cm de lado em cada canto da folha. O volume dessa caixa, em cm^3, será:

a) 1244
b) 1828
c) 2324
d) 3808
e) 12000

41) (ENEM) Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema abaixo, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do rio Paraná até o nível da jusante. A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4.200 m^3 por minuto.

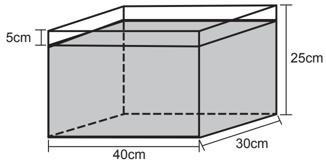


Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de:

a) 2 minutos;
b) 5 minutos;
c) 11 minutos;
d) 16 minutos;
e) 21 minutos.

42) (ENEM) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fabrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2400 cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

43) (UERJ) Com uma chapa plana delgada, de espessura uniforme e massa homogeneamente distribuída, construíram-se duas peças: uma com a forma de um cubo (fig.A) e a outra com a forma de um poliedro com 9 faces, formado a partir de um outro cubo congruente ao primeiro, onde as três faces menores são quadrados congruentes (fig.B)

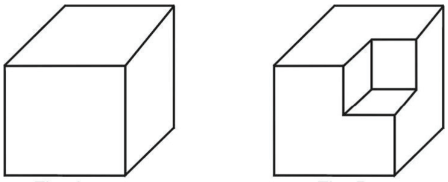


Fig. A Fig. B

As informações acima permitem a seguinte conclusão:

a) o peso de A é igual ao peso de B;
b) o volume de A é igual a volume de B;
c) a superfície de A é maior que a de B;
d) a superfície de A é menor que a de B.

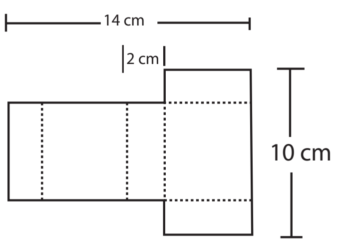
44) (UFRRJ) A diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo mede 7 cm e uma de suas arestas mede 3 cm. Determine o volume do paralelepípedo, sabendo que a diferença das outras duas arestas é 4 cm.

45) (UNIFICADO) Uma caixa-d'água com forma de paralelepípedo retângulo terá seu volume reduzido à metade do que tinha sido projetado inicialmente. Para isso, o construtor deverá diminuir as dimensões da base dessa caixa de 20% e 50%, respectivamente. Já em relação à medida da altura dessa caixa-d'água, o construtor irá:
a) aumentá-la em 15%
b) aumentá-la em 25%
c) aumentá-la em 30%
d) diminuí-la em 25%
e) diminuí-la em 30%

MAT0195

46) (UFF) Um reservatório em forma de paralelepípedo retângulo possui as dimensões internas medindo 4 m de comprimento, 3 m de largura e 3 m de altura e o nível de água está a 2 m do fundo. Se aumentamos o comprimento em 1 m e diminuímos a largura em 1 m, mantendo a mesma quantidade de água que havia inicialmente, podemos afirmar que o nível da água:
a) Não se altera;
b) Aumenta 60 cm;
c) Diminui 60 cm;
d) Diminui 40 cm;
e) Aumenta 40 cm.

47) (UFF) Um paralelepípedo retângulo é obtido, dobrando-se nas linhas pontilhadas, a folha de metal representada a seguir.



Calcule a diagonal deste paralelepípedo.

48) (UNIRIO) Uma sala de 8 m de comprimento, 60 dm de largura e 30 dm de altura deverá ser ocupada por 48 pessoas. Sabe-se que a quantidade de ar necessária para que uma pessoa tenha boas condições de permanecer numa sala é 4 m³.

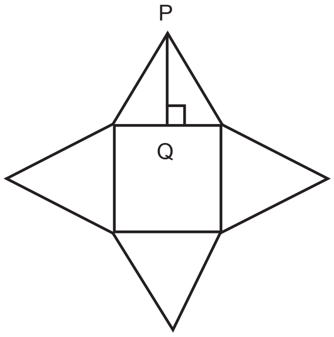
De quanto, no mínimo, deve-se aumentar a medida da altura dessa sala para que a necessidade de ar de todas as pessoas que lá estarão seja plenamente satisfeita?
a) 2 m
b) 1,5 m
c) 1 m
d) 0,75 m
e) 0,50 m

49) (UNIRIO) Um prisma de altura H e uma pirâmide têm bases com a mesma área. Se o volume do prisma é a metade do volume da pirâmide, a altura da pirâmide é:
a) $\frac{H}{6}$
b) $\frac{H}{3}$
c) 2H
d) 3H
e) 6H

50) (FUVEST) Uma folha de papel colorido, com forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após se ter concluído essa tarefa, e levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrará dessa folha de papel corresponde a:
a) 20%
b) 16%
c) 15%
d) 12%
e) 10%

51) Um grupo de esotéricos deseja construir um reservatório de água na forma de uma pirâmide de base quadrada. Se o lado da base deve ser 4/5 da altura e o reservatório deve ter capacidade para 720 m³, qual deverá ser a medida aproximada do lado da base?
a) 8,7 m
b) 12,0 m
c) 13,9 m
d) 15,0 m
e) 16,0 m

52) (UFF) A figura abaixo representa a planificação de uma pirâmide quadrangular regular.



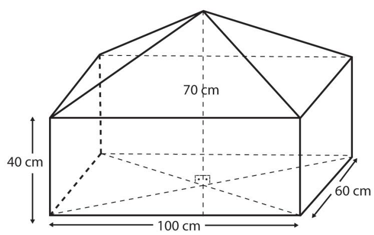
Sabendo-se que $\overline{PQ}$ mede $3\sqrt{3}$ cm e que as faces laterais são triângulos equiláteros, o volume da pirâmide é:

a) $18\sqrt{2}$ cm³
b) $36\sqrt{2}$ cm³
c) $48\sqrt{2}$ cm³
d) $60\sqrt{2}$ cm³
e) $72\sqrt{2}$ cm³

53) (UERJ) Leia os quadrinhos:

(*O Globo*, março 2000)

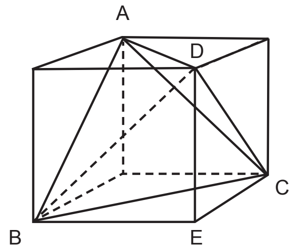
Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura a seguir, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.



Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em dm³, igual a:

a) 12
b) 13
c) 14
d) 15

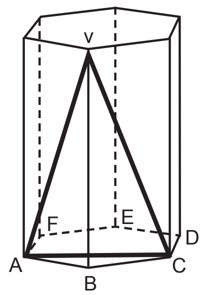
54) (UERJ) Com os vértices A, B, C e D de um cubo de aresta **a**, construiu-se um tetraedro regular, como mostra a figura abaixo:



Calcule:

a) o volume da pirâmide EBCD em função de **a**.
b) a razão entre os volumes do tetraedro ABCD e do cubo.

55) (UFF) A figura a seguir representa um prisma regular com 6m de altura e base hexagonal ABCDEF.



Determine o volume da pirâmide VABC, sabendo que o lado da base do prisma mede 3 m.

56) (UNIFICADO) Uma pirâmide quadrangular regular tem todas as arestas iguais a **x**. O volume dessa pirâmide é:

a) $\dfrac{x^3\sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{x^3\sqrt{2}}{6}$

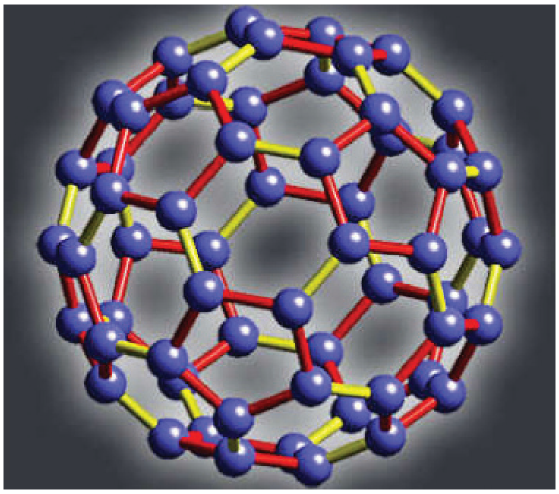
c) $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{6}$

e) x^3

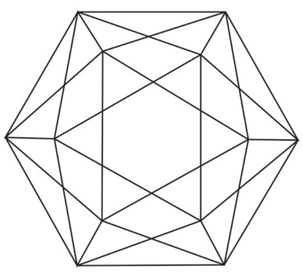
57) Numa publicação científica de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de Carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágo-

nos regulares, como numa bola de futebol. Em homenagem ao arquiteto norte-americano Buckminster Feller, a molécula foi denominada fulereno. Determine o número de átomos de carbonos nessa molécula e o número de ligações entre eles.



58) (UERJ) Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes.

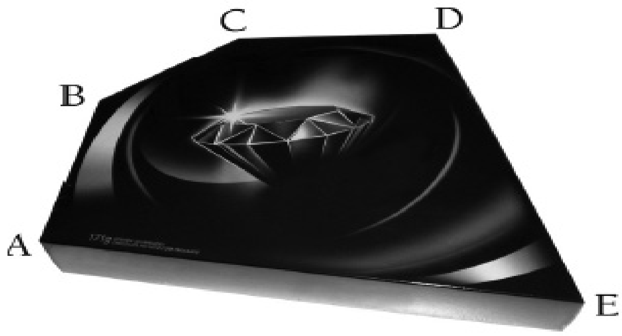
As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras:



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

a) 7,0 m
b) 6,3 m
c) 4,9 m
d) 2,1 m

59) (UERJ) A embalagem de papelão de um determinado chocolate, representada na figura abaixo, tem a forma de um prisma pentagonal reto de altura igual a 5 cm.



Em relação ao prisma, considere:

I) cada um dos ângulos A, B, C e D da base superior mede 120°;

II) as arestas AB, BC e CD medem 10 cm cada.

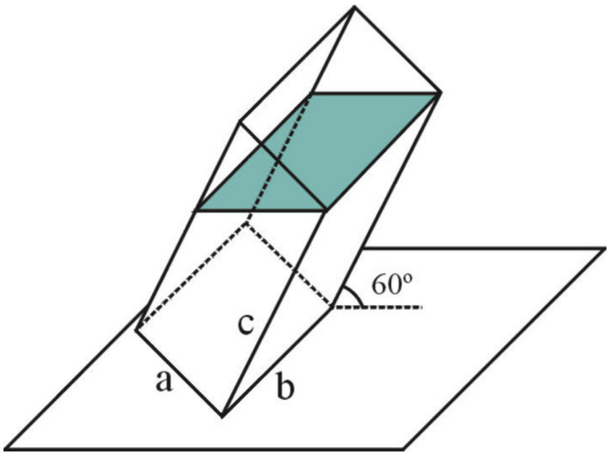
Considere, ainda, que o papelão do qual é feita a embalagem custa R$10,00 por m^2. Na confecção de uma dessas embalagens, o valor, em reais, gasto somente com o papelão é aproximadamente igual a:

a) 0,50
b) 0,95
c) 1,50
d) 1,85

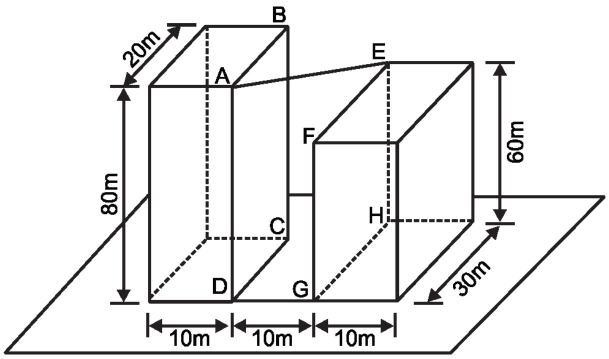
60) Uma piscina de forma retangular tem 8 m de largura, 15m de comprimento, 0,9 m de profundidade num de seus extremos e 2,7 m de profundidade no outro extremo, sendo seu fundo um plano inclinado. Calcule o volume de água da piscina quando a altura do nível da água é de 0,6 m na extremidade mais funda.

61) (UFRJ) Uma caixa sem tampa, completamente cheia de leite, tem a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões internas a = 10 cm, b = 7 cm e c = 16 cm.

Inclina-se a caixa de 60° em relação ao plano horizontal de modo que apenas uma das menores arestas fique em contato com o plano, como mostra a figura. Calcule o volume do leite derramado.



62) (UFF) Os prédios em forma de paralelepípedos retângulos esquematizados na figura serão ligados por um cabo **AE** de comprimento l, que deverá ficar perfeitamente esticado.

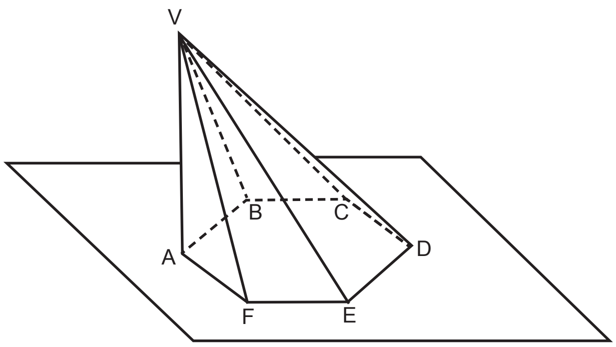


Sabendo que os prédios estão apoiados sobre um mesmo plano e têm faces **ABCD** e **EFGH** paralelas, determine o valor de l.

63) (PUC) Determine o volume de uma pirâmide hexagonal regular, cuja aresta lateral tem 10 m e o raio circunferência circunscrita à base mede 6 m.

DESAFIANDO

64) (UFF) O hexágono regular ABCDEF é base da pirâmide VABCDEF, conforme a figura.



A aresta $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano da base e tem mesma medida do segmento $\overline{AD}$. O segmento $\overline{AB}$ mede 6cm.

Determine o volume da pirâmide VACD.

65) (UFF) Um fabricante de embalagens, para fazer caixas de papelão, sem tampa, em forma de prisma hexagonal regular (veja figura 1, abaixo), utiliza-se de hexágonos regulares de papelão, cada um deles com lado 30 cm. Corta, em cada vértice, um quadrilátero, como o hachurado na figura 2 e, a seguir, dobra o papelão nas linhas tracejadas.

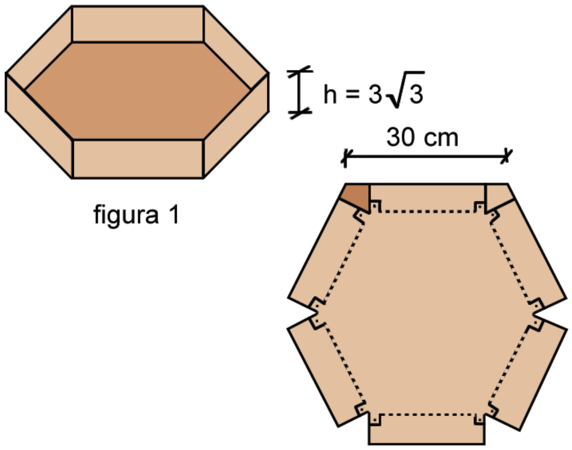


figura 1
figura 2

Sabendo que a altura da caixa é de $3\sqrt{3}$ cm, seu volume é:

a) 900 cm^3
b) 2700 $\sqrt{3}$ cm^3
c) 727 $\sqrt{3}$ cm^3
d) 776 $\sqrt{3}$ cm^3
e) 7776 cm^3

PESQUISANDO

A produção de diversos produtos é feita mundialmente: a matéria-prima é recolhida em um país, é transformada em outra nação, embalada em outro continente e vendida em vários países. Para que os produtos cheguem bem conservados para seus clientes, o transporte deve ser adequado ao tipo de mercadoria a ser transportada. Um aspecto importante é a cobrança pelo transporte dessas materiais, que pode ser feita pelo peso real e peso cubado. Pesquise sobre cubagem e descubra os fatores de cubagem para cada tipo de transporte.

RESUMINDO

- Paralelepípedo é o prisma onde todas as faces são paralelogramos.
- Paralelepípedo retângulo é o prisma de faces retangulares:

Área da base	Área lateral	Área total	Volume	Diagonal
$A_b = a.b$	$A_L = 2bc + 2ac$	$A_t = 2(ab+ac+bc)$	$V = a.b.c$	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$

- Cubo é o paralelepípedo retângulo de faces quadradas:

Área da base	Área lateral	Área total	Volume	Diagonal do cubo	Diagonal da face do cubo
$A_b = a^2$	$A_L = 4a^2$	$A_t = 6a^2$	$V = a^3$	$a\sqrt{3}$	$a\sqrt{2}$

- Pirâmide é o sólido em que há uma face em determinado plano e apenas um vértice fora desse plano, suas faces laterais são triângulos;
- O volume de uma pirâmide é $V = 1/3\ A_b\ .\ h$, onde A_b é a área da base e h a altura.
- A pirâmide triangular é chamada de tetraedro, quando todas as faces são triângulos equiláteros, é o tetraedro regular:

Altura	Área da base	Área lateral	Área total	Volume
$H = a\sqrt{6} / 3$	$A_b = a^2\sqrt{3} / 4$	$A_L = 3a^2\sqrt{3} / 4$	$A_t = a^2 \sqrt{3}$	$V = a^3 \sqrt{2} / 12$

- O Princípio de Cavallieri diz que ao deslocarmos o vértice de uma pirâmide sobre o plano que contém seu vértice e é paralelo á sua base, não alteramos seu volume.