PROF. 3º ANO
MATEMÁTICA
PADRÃO VOL. IV

Direção Executiva:
Fabio Benites

Gestão Editorial:
Maria Izadora Zarro

Diagramação, Ilustração de capa e Projeto Gráfico:
Alan Gilles Mendes
Alex França
Dominique Coutinho
Erlon Pedro Pereira
Estevão Cavalcante
Paulo Henrique de Leão

Estagiários:
Amanda Silva
Fabio Rodrigues
Gustavo Macedo
Lucas Araújo

Irium Editora Ltda
Rua Desembargador Izidro,
nº114 - Tijuca - RJ
CEP: 20521-160
Fone: (21) 2560-1349
www.irium.com.br

Autores:

Biologia:	Leandro Maia
Filosofia:	Gustavo Bertoche
Física:	Wilmington Collyer
Geografia:	Duarte Vieira
História:	Montgomery Miranda / Bernardo Padula
Leitura e Produção:	Leila Noronha / Marcelo Beauclair
Língua Espanhola:	Mizael Souza
Língua Inglesa:	Jaqueline Halack
Língua Portuguesa:	Leila Noronha / Marcelo Beauclair
Literatura:	Leila Noronha / Marcelo Beauclair
Matemática:	João Luiz / Gláucio Pitanga
Química:	Wendel Medeiros
Sociologia:	Anne Nunes

Atualizações:

Biologia:	Cid Medeiros
Geografia:	Thiago Azeredo
História:	Guilherme Braga
Língua Espanhola:	Karina Paim
Química:	Renata Galdino

Apresentação:

Olá, querido aluno.

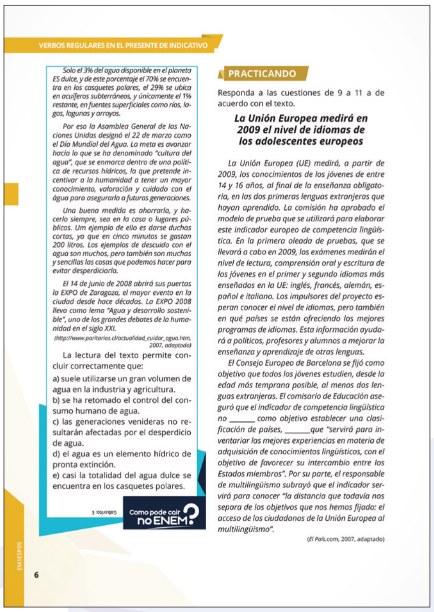
O material da **Irium Educação** foi elaborado por professores competentes e comprometidos com uma proposta de educação exigente e plural.

Neste livro, você encontrará uma teoria na medida certa, focada nas informações mais importantes hoje em dia, e **muitos exercícios** para fortalecer sua aprendizagem e preparação para os desafios futuros.

Vamos conhecer um pouco mais sobre este livro?

Todo capítulo inicia com uma capa, onde você encontrará uma imagem ilustrativa e os **objetivos de aprendizagem**. Estes resumem o que queremos que você aprenda. Quando chegar no final do capítulo, se você quiser saber se aprendeu o que é realmente importante, volte na capa e verifique se alcançou cada um dos objetivos propostos.

Antes de entrarmos na teoria, em cada capítulo, você encontrará uma **contextualização**. Ela funciona para mostrar para você porque o assunto é importante e como você poderá usar esse conhecimento no seu dia a dia.



No meio do caderno, quando estiver estudando, você encontrará inserções com informações relevantes e que “conversam” com portais da Irium Educação. É o caso do *box* **Como pode cair no ENEM?**, que trazem temas conectados ao assunto do capítulo e propõem questões do ENEM ou com o estilo da prova. Você poderá resolver os exercícios no seu caderno ou acessar o portal *comopodecairnoenem.com.br.* Lá você também encontrará todas essas questões resolvidas em vídeo.

Outra inserção interessante, que visa oferecer mais conhecimento relevante, é o **4News**. Nessa seção, será possível acessar notícias recentes que conectam o tema do capítulo com uma informação importante para a sua formação e para os diversos vestibulares. Na apostila, essas informações estão resumidas, mas poderá acessar esse conteúdo, produzido pela nossa equipe de professores, na íntegra, através do portal *4newsmagazine.com.br* ou utilizando o *QR code* inserido no *box*.

BIOQUÍMICA: QUAIS OS PRINCIPAIS COMPONENTES DO CORPO HUMANO?

3.2) Taxas de glicose no sangue

- O Teor de glicose no sangue é chamado de glicemia, e possui taxas normais de 40 ml de glicose / 100 ml de sangue até 100 ml de glicose / 100 ml de sangue;
- Valores abaixo = hipoglicemia; valores acima = hiperglicemia;
- Dois hormônios atuam no controle da glicemia e são produzidos no pâncreas: Insulina e Glucagon;
- A glicose é usada na respiração celular para produção de energia; o excesso é armazenado.
- Diabete melito

→ Insulino dependente = Hiperglicemia, com eliminação de glicose pela urina (“Doce”) = Glicosúria;

→ Insulino não dependente = redução da quantidade de receptores celulares de insulina e hiperglicemia = Glicosúria.

$$\text{Sangue} \underset{\text{Glucagon}}{\overset{\text{Insulina}}{\rightleftarrows}} \text{Células}$$

Teste de tolerância à glicose: é um teste de diagnóstico para diabetes. Após passar a noite em jejum, você colhe uma glicemia de jejum e recebe para beber uma solução com alta concentração de açúcar (75 g de glicose) e é colhida nova glicemia após 2 horas. O teste de tolerância oral à glicose é considerado positivo quando a glicemia fica acima de 200 mg/dl após 120 min. Normalmente, a glicose não sobe muito e retorna ao normal após duas a três horas. No diabético, a glicose sanguínea é geralmente mais alta após o jejum, sobe mais depois de ingerir a solução de glicose e leva quatro a seis horas para descer.

4 NEWS

Estudo indica que adoçante eleva glicose no sangue

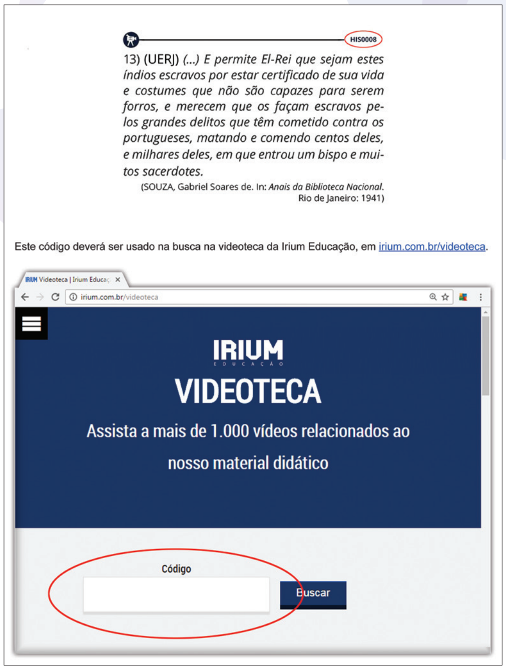
Pesquisas defendem que pessoas que consomem esses produtos regularmente podem estar colocando sua saúde em risco da mesma forma que uma pessoa obesa

Você provavelmente já passou pela seguinte situação quando pede um cafezinho: “Açúcar ou adoçante, senhor(a)?”. Bom, há algum tempo, o uso de adoçantes tornou-se popular no mundo, mas precisamente na década de 60. No Brasil, nos anos 80, estava associado aos portadores de distúrbios orgânicos, como a diabetes, e eram vendidos somente com prescrição médica. No entanto, em 1988, ocorreram mudanças na legislação e permitiram que os adoçantes passassem a ser vendidos sem prescrição e, atualmente, são consumidos por grande parte da população. Contudo, pesquisas realizadas em 2014, defendem que pessoas que consomem esses produtos regularmente, com o objetivo de perder ou evitar o ganho de peso, podem estar colocando sua saúde em risco da mesma forma que uma pessoa obesa. Saiba mais em *www.4newsmagazine.com.br.*

#OlhaaGlicose #AçúcarOuAdoçante

EM1BIO01

10



HIS0008

13) (UERJ) *(...) E permite El-Rei que sejam estes índios escravos por estar certificado de sua vida e costumes que não são capazes para serem forros, e merecem que os façam escravos pelos grandes delitos que têm cometido contra os portugueses, matando e comendo centos deles, e milhares deles, em que entrou um bispo e muitos sacerdotes.*

(SOUZA, Gabriel Soares de. In: *Anais da Biblioteca Nacional*. Rio de Janeiro: 1941)

Este código deverá ser usado na busca na videoteca da Irium Educação, em irium.com.br/videoteca.

Uma das principais marcas dos livros da Irium Educação são os exercícios, que primam pela quantidade e qualidade. Para ajudar os alunos a tirarem suas dúvidas, existem inúmeras **questões com soluções gravadas em vídeo**. Elas aparecem com uma câmera e um código. Para acessar a solução, utilize o código no campo de busca no espaço destinado (videoteca) no nosso site *irium.com.br/videoteca* ou até mesmo no *Youtube*.

Para finalizar, que tal encontrar um conteúdo ideal para aquelas revisões na véspera de provas e concursos? Essa é a proposta da seção **Resumindo**, na última página de cada capítulo. Aqui, você encontrará uma síntese com as principais informações do capítulo, como as fórmulas mais importantes, que você não pode esquecer.

A equipe da Irium Educação acredita em uma formação **exigente**, **completa** e **divertida**. Esperamos que este livro possa proporcionar isso a você.

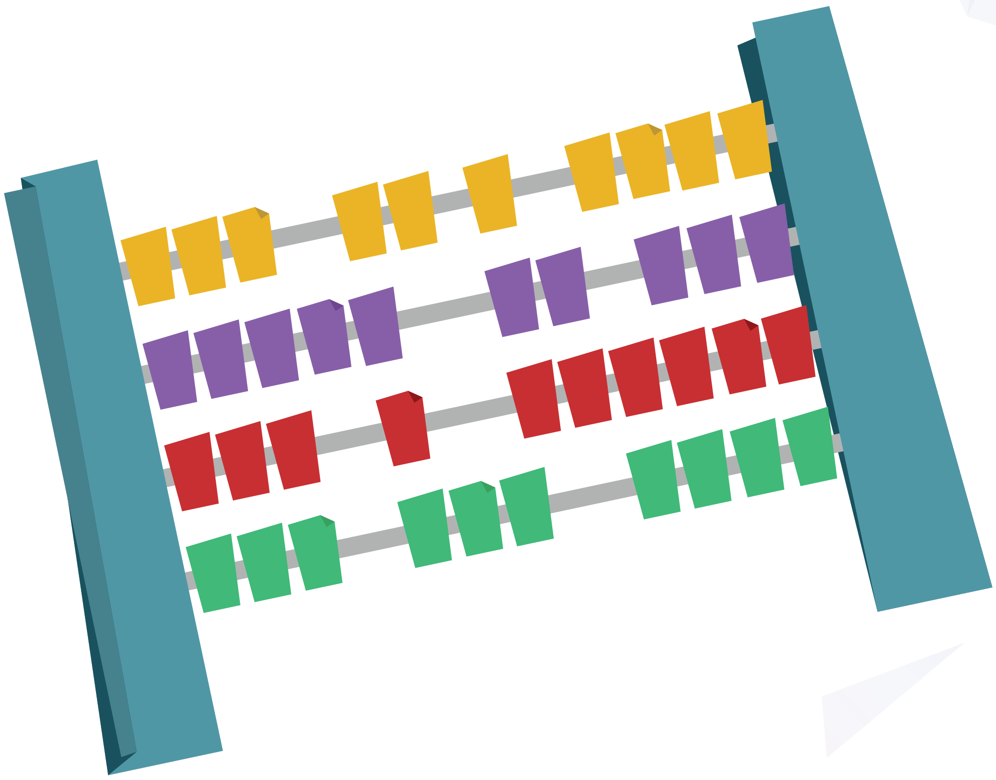
#vamboraaprender

“A Educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo.”

(Nelson Mandela)

Fabio Benites

Diretor-geral



MATEMÁTICA

3º ANO / PV

VOLUME IV

SUMÁRIO

ORGANIZANDO NÚMEROS E DADOS EM MATRIZES

(Disponível em: http://www.istockphoto.com/br. Acesso em: julho de 2017)

Objetivos de aprendizagem:

- Compreender o significado de uma matriz;
- Assimilar as diversas propriedades associadas às matrizes;
- Realizar operações envolvendo matrizes;
- Calcular determinantes de matrizes quadradas;
- Utilizar conceitos de matrizes para determinar conjuntos-solução de sistemas lineares.

Tabelas e matrizes

#	Equipe	J	VIT	E	DER	GP	GC	SG	PTS
1	City	3	3	0	0	9	3	6	9
2	Chelsea	3	3	0	0	7	2	5	9
3	Manchester United	3	3	0	0	6	1	5	9
4	Everton	3	2	1	0	4	2	2	7
5	Hull City	3	2	0	1	4	2	2	6
6	Middlesbrough	3	1	2	0	3	2	1	5
7	Tottenham	3	1	2	0	3	2	1	5
8	Arsenal	3	1	1	1	6	5	1	4
9	Leicester City	3	1	1	1	3	3	0	4
10	West Bromwich	3	1	1	1	2	2	0	4
11	Liverpool	3	1	1	1	5	6	-1	4
12	West Ham	3	1	0	2	3	5	-2	3
13	Burnley	3	1	0	2	2	4	-2	3
14	Swansea City	3	1	0	2	2	4	-2	3
15	Southampton	3	0	2	1	2	4	-2	2
16	Sunderland	3	0	1	2	3	5	-2	1
17	Crystal Palace	3	0	1	2	1	3	-2	1
18	Watford	3	0	1	2	3	6	-3	1
19	Bournemouth	3	0	1	2	2	5	-3	1
20	Stoke City	3	0	1	2	2	6	-4	1

(Disponível em: http://diariofutebolisticofc.blogspot.com.br/p/tabela-campeonato-ingles-2016-2017.html. Acesso em: julho de 2017)

Você já reparou que tabelas são importantes ferramentas para organizar um campeonato?

O campeonato Ingles de futebol é uma paixão para os amantes desse esporte e, anualmente, é disputado por diversos clubes em todo o território Ingles. Mas para a organização e acompanhamento dos fãs, a tabela de classificação é atualizada a cada rodada e divulgada nas mídias populares. Nessa tabela temos informações sintetizadas do desempenho de cada clube, informações tais que podem ser cruzadas e comparadas com os diversos times participantes.

Ao longo dessa seção estudaremos como as tabelas são uma importante ferramenta matemática.

1) Matrizes: introdução

Observe o resultado da pesquisa feita sobre a variação das temperaturas médias, em graus Celsius, nas regiões brasileiras R_1, R_2, R_3, R_4 durante os meses m_1, m_2, m_3.

	M_1	M_2	M_3
R_1	15°	19°	23°
R_2	28°	30°	36°
R_3	41°	38,5°	35°
R_4	30°	35°	33,5°

Cada valor localizado na linha i e na coluna j dessa tabela é a respectiva temperatura média da região R_i durante o mês m_j. Por exemplo, a temperatura média da região R_2 durante o mês m_3 é 36°C.

Essas tabelas são muito úteis no cotidiano, pois permitem uma visualização simplificada do cruzamento de duas ou mais informações sobre o objeto de estudo. Chamamos essas tabelas de **matrizes**.

1.1) Definição

Chama-se matriz do tipo m x n (lemos “m por n”) toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas.

1.1.1) Leitura e representação

Essa tabela pode ser representada entre parênteses ( ) ou entre colchetes [] e cada elemento é localizado através de sua posição. O elemento a_{ij} é aquele localizado na linha i e na coluna j. Vejamos alguns exemplos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

É uma matriz do tipo 3x2, pois possui 3 linhas e 2 colunas. O elemento a_{31} (lemos: "a três, um") está localizado na linha 3 e coluna 1, assim dizemos que $a_{31} = 4$.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 20 & 13 & 17 \\ -2 & 15 & 6 & 19 \end{bmatrix}$

É uma matriz do tipo 2x4, pois possui 2 linhas e 4 colunas. O elemento a_{24} (lemos: "a dois, quatro") está localizado na linha 2 e coluna 4, assim dizemos que $a_{24} = 19$.

Dessa maneira representamos genericamente uma matriz do tipo mxn da seguinte maneira:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

PRATICANDO

1) Na matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, determine:

a) a soma dos elementos da 2ª coluna.

b) $a_{21} + a_{33} + a_{12}$.

2) (UERJ) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) O instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura.

b) A temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

1.2) Tipos de matrizes

1.2.1) Matriz linha

Chamamos de **matriz linha** a matriz que possui somente uma linha, ou seja, toda matriz do tipo 1xn.

Exemplo:

a) $A_{1X3} = (1\ 5\ -9)$

1.2.2) Matriz coluna

Chamamos de **matriz coluna** a matriz que possui somente uma coluna, ou seja, toda matriz do tipo nx1.

Exemplo:

a) $A_{3x1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.2.3) Matriz nula

Chamamos de **matriz nula** qualquer matriz do tipo mxn cujos elementos são todos iguais a zero.

Exemplos:

a) *Matriz nula do tipo 2x3:* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) *Matriz nula 2x2:* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.4) Matriz quadrada

A matriz que possui mesma quantidade de linhas e colunas é chamada de **matriz quadrada**. Esse número de linhas (ou de colunas) é chamado também de ordem da matriz.

Exemplos:

a) *A matriz* $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *é quadrada de ordem 2.*

b) *A matriz* $A_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ *é quadrada de ordem 3.*

Nas matrizes quadradas, os elementos a_{ij} tais que i = j formam uma diagonal chamada

diagonal principal. Já os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ é chamada **diagonal secundária**.

diagonal secundária

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal principal

Exemplos:

a) Na matriz $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *os elementos da diagonal principal são* $a_{11} = 0$ *e* $a_{22} = 4$ *e os da diagonal secundária são* $a_{21} = 1$ *e* $a_{12} = 2$.

b) Na matriz $A_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ *os elementos da diagonal principal são* $a_{11} = -1$, $a_{22} = 3$ *e* $a_{33} = -2$ *e os da diagonal secundária são* $a_{13} = 1$, $a_{22} = 3$ *e* $a_{31} = 8$.

1.2.5) Matriz diagonal

Chamamos de **matriz diagonal** toda matriz quadrada cujos elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo: *Vejamos a matriz diagonal D de ordem 3:*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.2.6) Matriz identidade

A **matriz identidade** é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a um.

Exemplos:

a) Identidade de ordem 2: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Identidade de ordem 3: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.2.7) Matriz transposta

Considere uma matriz A do tipo mxn. A **matriz transposta** de A, normalmente representada por A^t, é a matriz onde cada linha é ordenadamente igual às colunas de A. Dessa maneira, A^t será do tipo nxm.

Exemplos:

a) Se tomarmos a matriz $A_{5x1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$, *sua transposta será* $A^t_{1x5} = [4\ 7\ 9\ 8\ 11]$.

b) Se tomarmos a matriz $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, *sua matriz transposta será:*

$$B^t_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.3) Operações com matrizes

1.3.1) Igualdade de matrizes

Dizemos que duas matrizes A e B são iguais quando seus respectivos elementos correspondentes são iguais, ou seja, $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$ etc.

Exemplos: *Considere as matrizes:*

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & 7 \end{pmatrix} \text{ dessa maneira temos: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ a = 3 \end{cases}$$

1.3.2) Adição e subtração de matrizes

A soma (ou subtração) de duas matrizes A e B, do mesmo tipo, é a matriz em que cada elemento é a soma (ou subtração) de seus elementos correspondentes em A e em B.

Exemplos:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 \\ 5+(-1) & 9+4 \\ -2+3 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 13 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 5-0 & 1-3 \\ 3-3 & -1-2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3.3) Multiplicação de um número real por uma matriz

O produto de um número real k por uma matriz A é a matriz em que cada elemento é o produto de seu elemento correspondente em A pelo número k. Esse produto é indicado por k . A.

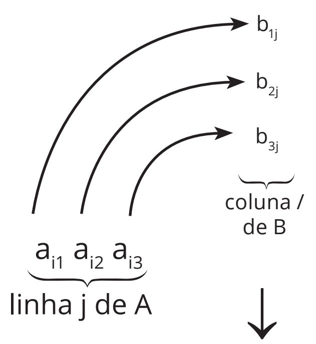
Exemplo: $5 . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 . 1 & 5 . 2 \\ 5 . 3 & 5 . 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

1.3.4) Multiplicação de matrizes

Antes de definirmos a multiplicação de matrizes, vejamos como é definido o produto de uma linha por uma coluna. Considere as matrizes A_{2x3} e B_{3x2} onde tomamos a linha i de A e a coluna j de B, ou seja:

$$(a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; a_{i3}) \text{ e } \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix}$$

Definimos como o produto da linha i pela coluna j o valor $a_{j1} . b_{1j} + a_{i2} . b_{2j} + a_{i3} . b_{3j}$, ou seja, adicionamos os resultados obtidos pela multiplicação ordenada dos elementos da linha i pelos elementos da coluna j.



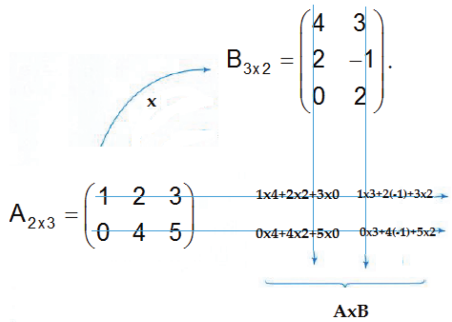
$$\underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}}_{\text{produto da linha j pela coluna j}}$$

Podemos observar que se não houver a mesma quantidade de elementos não se pode efetuar tal produto. Dessa maneira, definimos então o produto de matrizes.

Considere duas matrizes A_{mxn} e B_{nxk}. O produto de A por B é a matriz C, onde cada elemento C_{ij} é o produto da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B.

Observe o método para calcularmos o produto do produto de:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ por } B_{3x2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



Onde:

O produto da linha 1 de A pela coluna 1 de B é 1 . 4 + 2 . 2 + 3 . 0 = 8;

O produto da linha 1 de A pela coluna 2 de B é 1 . 3 + 2 . (–1) + 3 . 2 = 7;

O produto da linha 2 de A pela coluna 1 de B é 0 . 4 + 4 . 2 + 5 . 0 = 8;

O produto da linha 2 de A pela coluna 2 de B é 0 . 3 + 4(–1) + 5 . 2 = 6.

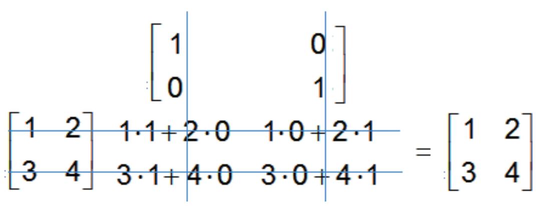
Portanto $A . B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

Vejamos mais alguns exemplos:

a) *Calcule o produto de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *pela identidade de ordem 2.*

Solução:

Fazendo o cálculo pelo método apresentado, temos:



Assim, $A . I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) *Considere* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcule a matriz* A^2.

Solução

Fazendo o cálculo pelo método apresentado, temos:

$$\begin{array}{c|cc} & \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} & \begin{matrix}1\cdot1+2\cdot3\\3\cdot1+4\cdot3\end{matrix} & \begin{matrix}1\cdot2+2\cdot4\\3\cdot2+4\cdot4\end{matrix} \end{array} = \begin{bmatrix}7 & 10\\15 & 22\end{bmatrix}$$

Assim, $A^2 = A\,.\,A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 10\\15 & 22\end{bmatrix}$

Observação

1) Observemos que para existir o produto de A por B, a quantidade de elementos da linha de A e a quantidade de elementos da coluna de B devem ser iguais. Em outras palavras, dizemos que o número de colunas de A é igual ao numero de linhas de B para existir o produto A . B. Dessa maneira a matriz produto AB tem o mesmo número de linhas de A, e o mesmo número de colunas de B.

$$A_{mxn} \,.\, B_{nxp} = (AB)_{mxp}$$

2) O produto de uma matriz A pela identidade, é igual a própria matriz A. Podemos inclusive associar a ideia de que a matriz identidade representa, no produto de matrizes, a mesma função que o número 1 na multiplicação de números reais, ou seja, é o elemento neutro da multiplicação.

3) O produto de matrizes não é necessariamente comutativo, isto é, A . B não é necessariamente igual a B . A. Voltemos ao exemplo:

Seja $A_{2X3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *= e* $B_{3x2} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$A_{2X3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Calculando A . B, temos $A\,.\,B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, *e calculando agora B . A obtemos:*

$B\,.\,A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 31 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

PRATICANDO

3) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 4 \\ -6 & 3 & y \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 5 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & 8 & z \end{bmatrix}$ calcule x, y, z para que $B = A^t$.

4) Dadas as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Determine o elemento x_{32} da matriz AB.

5) A matriz A é do tipo 5x7 e a matriz B, do tipo 7x5. Assinale a alternativa correta.
a) A matriz AB tem 49 elementos.
b) A matriz BA tem 25 elementos.
c) A matriz $(AB)^2$ tem 625 elementos.
d) A matriz $(BA)^2$ tem 49 elementos.
e) A matriz (AB) admite inversa.

MAT0039

6) (UERJ) Em um supermercado, um cliente empurra seu carrinho de compras passando pelos setores 1, 2, e 3, com uma força de módulo constante de 4 newtons, na mesma direção e mesmo sentido dos deslocamentos.

Na matriz A abaixo, cada elemento a_{ij} indica, em joules, o trabalho da força que o cliente faz para deslocar o carrinho do setor i para o setor j, sendo i e j elementos do conjunto {1, 2, 3}.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 60 \\ 40 & 0 & 80 \\ 60 & 80 & 0 \end{bmatrix}$

Ao se deslocar do setor 1 ao 2, do setor 2 ao 3 e, por fim, retornar ao setor 1, a trajetória do cliente descreve o perímetro de um triângulo.

Nessas condições, o cliente percorreu, em metros, a distância de:

a) 35 c) 45
b) 40 d) 50

7) (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, GAMA e RAPA, são trocadas usando uma linguagem de códigos, na qual cada número inteiro de 0 a 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
7	10	27	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência GAMA enviou para a RAPA o nome de um espião codificado na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para decodificar uma palavra de 5 letras, dada por uma matriz A, de ordem 5 x 1, formada por inteiros de 0 a 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

E, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:
a) DIEGO
b) SHUME
c) SADAN
d) RENAN
e) RAMON

Como custos de produção pode cair no ENEM?

MAT0038

Indústrias e fábricas que produzem artigos variados, precisam encontrar maneiras eficientes de calcular custos de produção e assim otimizar a administração financeira. Para isso, o uso de matrizes e suas operações é um ótimo métodos para tal, e então é importante dominar as noções de construção das matrizes e operações, principalmente a multiplicação.

Uma empresa possui 3 filiais: a filial 1, a filial 2 e a filial 3. Ela comprou camisas para o uniforme de seus funcionários nos tamanhos P, M e G. Se representarmos o tamanho P pelo número 1, M pelo número 2 e G pelo número 3 teremos que, na matriz abaixo, cada elemento a_{ij} representa o número de camisas tamanho i que a filial j comprou.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Se cada camisa custa R$ 7,00, quanto gastou a filial que gastou mais?
a) R$ 133,00
b) R$ 126,00
c) R$ 119,00
d) R$ 147,00
e) R$ 161,00

Gabarito: D

2) Cálculo da matriz inversa

2.1) Inverso de um número

O conceito de matriz inversa é muito semelhante ao conceito de inverso de um número. Vale relembrar que dois números são ditos inversos quando seu produto é igual a 1. Em outras palavras, dizemos que o número **a** é inverso do número **b** se, e somente se, a . b = 1.

Exemplo:

Os números 2/3 e 3/2 são inversos pois 2/3 . 3/2 = 1.

Observação

O número 0 não tem inverso, pois não existe numero real x tal que: 0 . x = 1.

2.2) Matriz inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n possui inversa se, e somente se, existe uma matriz B, tal que A . B = B . A = I_n, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

É muito comum usar a notação A^{-1} para indicar a matriz inversa, dessa maneira lemos A^{-1} como "inversa da matriz A".

Exemplo:

As matrizes $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

São inversas, pois $A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Assim, podemos dizer então que* $B = A^{-1}$.

2.2.1) Obtenção da matriz inversa

É possível obter a inversa de uma matriz a partir da sua definição como no exemplo abaixo:

Exemplo:

Obter a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

Solução:

Fazemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. *Pela definição de inversão de matrizes devemos ter* $A \cdot A^{-1} = I_2$, *ou seja:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3x + 2z & 3y + 2t \\ 7x + 5z & 7y + 5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$3x + 2z = 1$

$7x + 5z = 0$

$3y + 2t = 0$

$7y + 5t = 1$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

PRATICANDO

8) Calcule x e y sabendo que $\begin{bmatrix} 3 & y \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & 3 \end{bmatrix}$ são matrizes inversas.

9) (CESGRANRIO) Multiplicando $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtemos $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. O produto dos elementos a e b da primeira matriz é:

a) – 2

b) – 1

c) 0

d) 1

e) 6

3) Determinantes

Chamamos de **determinante da matriz A** um número real detA que associamos a cada matriz quadrada. Esse número é determinado como veremos a seguir:

3.1) Determinantes de matrizes de ordem 2

Considere a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Chamamos de detA o número obtido pela expressão a . d – b . c, podendo também ser indicado por:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Dessa maneira temos:

diagonal secundária

det A = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc

diagonal principal

Exemplo:

a) O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *é:*

det A = $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ $= 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14$

3.2) Determinantes de matrizes de ordem 3

Considere uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Chamamos de detA o número obtido pela expressão aei + bfg + cdh – ceg – bdi – afh. Para facilitar o calculo desse determinante, o matemático francês Pierre Frederic Sarrus (1798–1861) criou a regra prática apresentada a seguir, conhecida como **regra de Sarrus**.

1º passo: Repita, à direita do determinante, as duas primeiras colunas e desenhe as setas representadas abaixo;

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

2º passo: Multiplique os três números alinhados em cada seta, mantendo o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal principal e invertendo o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal secundária.

$$\begin{array}{ccccc} & & -gec & -hla & -idb \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ & & aei & bfg & cdh \end{array}$$

3º passo: Some os resultados obtidos.

Exemplo:

Calcule o valor do determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solução:

Repetindo as colunas e efetuando o produto como descrito acima, obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} & & 9 & -10 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ & & 4 & 15 & 2 \end{array}$$

Portanto, temos que detA = 4 + 15 + 3 + 9 – 10 + 2 ↔ detA = 23.

3.3) Propriedades importantes

Dadas duas matrizes quadradas A e B, temos que:

$$\det(A \,.\, B) = \det A \,.\, \det B$$

Com base nisso, podemos obter conclusões importantes como:

a) O determinante da inversa da matriz A.

Já sabemos que $A \,.\, A^{-1} = I_n$, assim temos que:

$$\underbrace{\det(A \,.\, A^{-1})}_{\det A \,.\, \det A^{-1}} = \underbrace{\det I_n}_{1} \leftrightarrow \det A \,.\, \det A^{-1} = 1$$

$$\leftrightarrow \quad \det A^{-1} = 1/\det A$$

Note que se detA = 0, não definimos $\det A^{-1}$, dessa maneira a matriz A admite inversa se, e somente se detA ≠ 0.

b) Considere n ∈ N, qual o valor de $\det(A^n)$?

Observe que:

$$\det(A^n) = \det \underbrace{(A.A.\ldots.A)}_{n\ \text{vezes}} = \underbrace{\det A \,.\, \det A \,.\, \ldots \,.\, \det A}_{n\ \text{vezes}}$$

$$= (\det A)^n$$

Exemplos:

a) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ temos que detA = –5 e detB = –2, logo det(A . B) = (–5) . (–2) = 10.

b) A matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ possui determinante detA = 3 . 3 – 2 . 7 = 9 – 14 = –5. Sua matriz inversa possui determinante $\det A^{-1} = 1/\det A = -1/5$.

PRATICANDO

10) Sendo A e B matrizes quadradas da mesma ordem tal que det A = 6 e det (AB) = 15, calcular detB.

11) Determine os valores de x que satisfazem a equação $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix} = 0$

MAT0040

12) (UFRJ) Os números reais a, b, c e d formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Calcule o determinante da matriz.

$$\begin{pmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{pmatrix}$$

4) Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações é formado por duas ou mais equações e sua solução é formada por números que, ao substituírem a incógnita, satisfazem todas as equações.

Exemplo: *No sistema* $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

ambas as equações são satisfeitas para x = 3 e y = 2.

Analisemos então, os principais métodos de solução de sistemas de equações de duas incógnitas.

4.1) Métodos de soluções de um sistema linear

4.1.1) Método de substituição

Isolamos uma das variáveis em uma das equações e em seguida substituímos essa expressão na outra equação.

Exemplo: *Resolver o sistema:* $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

Solução:

Na primeira equação vamos isolar a incógnita x: $x = 5 - 3y$

Em seguida, na segunda equação, substituímos x por 5 – 3y:

$5(5 - 3y) - y = 9 \leftrightarrow 25 - 15y - y = 9 \leftrightarrow 16y = 16 \leftrightarrow y = 1$

Substituindo o valor de y na expressão obtida para x: $x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$

Portanto a solução do sistema será x = 2 e y = 1 ou S = {(2, 1)}.

4.1.2) Método da adição

Deve-se multiplicar as equações por valores adequados de forma a simplificar uma das variáveis por adição das duas equações.

Exemplo: *Resolver o sistema:* $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

Solução:

Analisando as equações notamos que devemos multiplicar a segunda equação por (3) e assim obter um novo sistema equivalente ao primeiro:

$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 15x - 3y = 27 \end{cases}$

Somando as duas equações temos: $16x = 27 + 5 = 32 \leftrightarrow x = 2$

O valor de x deve ser substituído em uma das equações para obter o valor de y: $2 + 3y = 5 \leftrightarrow y = 1.$

Portanto a solução do sistema será x = 2 e y = 1.

PRATICANDO

13) Lúcia comeu 2 sanduíches e tomou um suco e gastou R$ 10,60. Se o preço de um sanduíche e um suco é R$6,40, qual o preço de 1 sanduíche?

14) (UFF) Em uma loja, Pedro comprou duas calças e nove camisas, pagando R$ 451,00 no total. Paulo foi à mesma loja e pagou R$ 207,00 por uma calça e quatro camisas. João comprou, na mesma loja, três calças e nove camisas. Sabendo que cada calça foi vendida por x reais e cada camisa foi vendida por y reais, é correto afirmar que João pagou R$ 500,00? Justifique sua resposta.

4.2) Sistemas de três equações lineares

Operamos da mesma maneira. Utilizando o método da adição, também chamado de escalonamento, em geral toma-se uma equação para anular um mesmo coeficiente das outras duas, e assim obter um sistema 2 x 2.

Exemplo: *Resolva*

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

Observemos que facilmente podemos eliminar a incógnita z utilizando a 1ª linha. Basta tomarmos $L_2 + L_1$, que obtemos:

$$\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ \hline 3x - y = \quad 7 \end{array} \; +$$

e $L_3 + 2 . L_1$, que obtemos,

$$\begin{array}{r} 3x - y - 2z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 6 \\ \hline 5x + 3y = \quad 7 \end{array}$$

donde concluímos que x = 1.

Daí temos o sistema $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$*, que ao tomarmos $L_2 + 3L_1$ temos:*

$$\begin{array}{r} 9x - 3y = 21 \\ 5x + 3y = 7 \\ \hline 14x = 28 \end{array} \; +$$

ou ainda, x = 2 e assim, y = –1. Ao substituir $x + 2y + z = 3 \rightarrow 2 + 2 . (-1) + z = 3 \leftrightarrow z = 3$. Portanto a solução do sistema é x = 2, y = –1 e z = 3.

Portanto a solução do sistema é x = 2, y = –1 e z = 3.

PRATICANDO

15) Em uma padaria, ao comprar um bombom, um refrigerante e um sorvete, tem-se um custo total de R$ 7,00. Ao comprar dois bombons, um refrigerante e dois sorvetes, tem-se um total de R$ 12,00. Ao comprar três bombons, 5 refrigerantes e um sorvete, tem-se um total de R$ 17,00. Determine o preço da cada um desses itens, bombom, refrigerante e sorvete.

16) (UFF) Um dos textos chineses mais antigos é o *I-King*, ou *livro das permutações*. Nele aparece um diagrama numérico “lo-shu”, conhecido como “quadrado mágico”. A soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é a mesma.

Considere o quadrado mágico representado a seguir:

4	3x	z
x	5	7y
4z	y	6

Calcule os valores de x, y e z.

4.3) Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que ele tem. Ele pode ser: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível.

4.3.1) Sistema possível e determinado (SPD)

É todo sistema linear que apresenta uma única solução.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Esse sistema apresenta uma única solução que é o par ,ou seja x = 8 e y = 2.

4.3.2) Sistema possível e indeterminado (SPI)

É todo sistema linear que apresenta mais de uma solução.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

Esse sistema apresenta mais de uma solução: (5, 0); (1, 4); (3, 2) etc.

Observação

Se um sistema linear admite mais de uma solução, então ele admite infinitas soluções.

4.3.3) Sistema impossível (SI)

É todo sistema linear que não admite solução.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 13 \end{cases}$

Note que nenhuma solução da primeira equação é também solução da segunda.

4.4) Discussão de sistemas

Considere o sistema de equações a seguir:

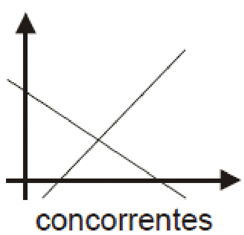
Exemplo: $\begin{cases} ax + by = c \\ Ax + By = C \end{cases}$

Dessa maneira, ao observar os coeficientes das incógnitas, podemos concluir que:

I) Sistema possível e determinado

$$\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$$

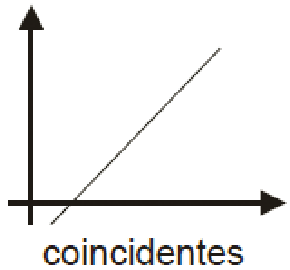
Uma única solução
Retas concorrentes



II) Sistema possível e indeterminado

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

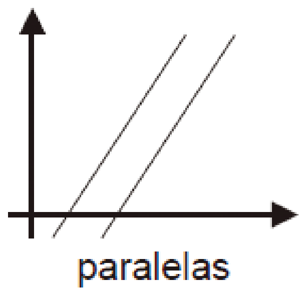
Infinitas soluções
Retas coincidentes



III) Sistema impossível

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} \neq \frac{c}{C}$$

Nenhuma solução
Retas paralelas



Exemplo:

Classifique os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 9 \\ -3x - 9y = -11 \end{cases}$

Solução:

Relacionando os coeficientes das equações, temos:

$$\frac{2}{-3} = \frac{6}{-9} \neq \frac{9}{-11}$$

Logo, o sistema é impossível.

Exemplo:

b) Discutir o sistema $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ -2x + y = -10 \end{cases}$

Solução:

Relacionando os coeficientes das equações, temos:

$$\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{10}{-10}$$

Logo, o sistema é possível indeterminado.

PRATICANDO

17) (ESPM) O sistema $\begin{cases} ax + 4y = a^2 \\ x + ay = -2 \end{cases}$

em x e y, é possível e indeterminado se, e somente se:

a) $a \neq -2$
b) $a \neq 2$
c) $a = +2$
d) $a = -2$
e) $a = 2$

Qual a cidade mais violenta do Brasil?

Quais os valores que têm norteado as diferentes práticas sociais?

Dá para dizer que duas cidades disputam esse título infeliz: a pequena Juruena, no Mato Grosso, e Serra, um dos maiores municípios do Espírito Santo. Nas estatísticas, Juruena seria a mais violenta: ela tem um índice de 139,7 pessoas assassinadas por ano para cada 100 mil habitantes. O problema dessa estatística é que o número-base de 100 mil habitantes (usado em pesquisas mundiais) pode gerar distorções em municípios como Juruena, que tem apenas 6 mil moradores. Quer saber mais sobre o tema? Então, visite a nossa página *www.4newsmagazine.com.br.*

#violencianao#educacaoeasolucao

APROFUNDANDO

18) (UNICAMP) Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a:

a) 12
b) 15
c) 16
d) 20

19) (IFPE) Rodrigo, Otavio e Ronaldo gostam muito de comida japonesa e saíram para comer *temaki*, também conhecido como *sushi* enrolado à mão, cujo o formato lembra o de um cone. Foram, então, visitando vários restaurantes, tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos *temakis* cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ e } D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

S refere-se às quantidades de *temakis* de sábado e D às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de cones que a pessoa i pagou para a pessoa j sendo Rodrigo o número 1, Otávio, o número 2 e Ronaldo, o número 3 ((a_{ij}) representa o elemento da linha i e da coluna j de cada matriz).

Assim, por exemplo, no sábado, Rodrigo pagou 3 *temakis* que ele próprio consumiu

(a_{11}), 2 *temakis* consumidos por Otávio (a_{12}) e nenhum por Ronaldo (a_{13}) que corresponde à primeira linha da matriz S. Quantos *temakis* Otávio ficou devendo para Rodrigo neste fim de semana?
a) nenhum
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

20) (UFRJ) Há 5 senadores designados para uma Comissão Parlamentar de Inquérito. Eles devem escolher entre si um presidente para a Comissão, sendo que cada senador pode votar em até 3 nomes. Realizada a votação onde cada um deles recebeu um número de 1 a 5, os votos foram tabulados na matriz A = (a_{ij}), abaixo indicada. Na matriz A, cada elemento a_{ij} é igual a 1(um), se i votou em j; e é igual a 0 (zero), caso contrário.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Responda, justificando:
a) Qual é o candidato mais votado?
b) Quantos candidatos votaram em si mesmos?

21) (UFRJ) Em uma cidade, há três revistas de noticiário semanal: 1, 2, 3. Na matriz A=(a_{ij}) abaixo, o elemento a_{ij} representa a probabilidade de um assinante trocar a assinatura da revista i para a revista j, na época da renovação.

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a probabilidade de os assinantes da revista 2 trocarem de revista quando forem renovar a assinatura?
b) Quais os leitores menos satisfeitos com a revista que estão assinando?

22) (ESPM) A distribuição dos n moradores de um pequeno prédio de apartamentos é dada pela matriz.

$$\begin{bmatrix} 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & y \\ 6 & y & x+1 \end{bmatrix}$$

Onde cada elemento a_{ij} representa a quantidade de moradores do apartamento j do andar i.

Sabe-se que, no 1º andar, moram 3 pessoas a mais que no 2º e que os apartamentos de número 3 comportam 12 pessoas ao todo. O valor de n é:
a) 30
b) 31
c) 32
d) 33
e) 34

23) (UEG) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B, ambas de ordem 2 x 2 onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, a = 1, b = 2, c = 3, ..., z = 26. Por exemplo, se a resolução de A . B for igual a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{vmatrix}$$

Logo a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz:

$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ então a matriz A é:

a) $\begin{vmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}$

24) (UEL) Uma reserva florestal foi dividida em quadrantes de $1m^2$ de área cada um. Com o objetivo de saber quantas samambaias havia na reserva, o número delas foi contado por quadrante da seguinte forma:

Número de samambaias por quadrante	Número de quadrantes
$A_{7\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$B_{7\times1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

O elemento a_{ij} da matriz A corresponde ao elemento b_{ij} da matriz B, por exemplo, 8 quadrantes contêm 0 (zero) samambaia, 12 quadrantes contêm 1 samambaia.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a operação efetuada entre as matrizes A e B que resulta no número total de samambaias existentes na reserva florestal.

a) $A^t \times B$
b) $B^t \times A^t$
c) $A \times B$
d) $A^t + B^t$
e) $A + B$

25) (UERJ) Observe a matriz A, quadrada e de ordem três.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}47 & 0{,}6 \\ 0{,}47 & 0{,}6 & x \\ 0{,}6 & x & 0{,}77 \end{pmatrix}.$$

Considere que cada elemento a_{ij} dessa matriz é o valor do logaritmo decimal de $(i + j)$.

O valor de x é igual a:

a) 0,50
b) 0,70
c) 0,77
d) 0,87

26) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, e tais que $A \cdot B^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, então a e b valem, respectivamente:

a) 7 e 3
b) 6 e 4
c) 6 e 3
d) 7 e 4
e) 2 e 2

27) (UFPR) Um criador de cães observou que as rações das marcas A, B, C e D contêm diferentes quantidades de três nutrientes, medidos em miligramas por quilograma, como indicado na primeira matriz abaixo. O criador decidiu misturar os quatro tipos de ração para proporcionar um alimento adequado para seus cães. A segunda matriz abaixo dá os percentuais de cada tipo de ração nessa mistura.

$$\begin{array}{l} \\ \text{nutriente 1} \\ \text{nutriente 2} \\ \text{nutriente 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 210 & 370 & 450 & 290 \\ 340 & 520 & 305 & 485 \\ 145 & 225 & 190 & 260 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{percentuais de mistura} \\ \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{bmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{bmatrix} \end{array}$$

Quantos miligramas do nutriente 2 estão presentes em um quilograma da mistura de rações?

a) 389 mg
b) 330 mg
c) 280 mg
d) 210 mg
e) 190 mg

28) (UEMA) Uma empresa da construção civil faz 3 tipos de casa: tipo 1, para casal sem filhos; tipo 2, para casal com até 2 filhos e tipo 3, para casal com 3 ou mais filhos. A empresa de material de construção Barateiro Umbizal fornece ferro, madeira, telha e tijolo, para a primeira etapa da construção, conforme tabelas de material e de preço.

	Quantidade de material fornecido pela empresa Barateiro Umbizal			
Tipo da Casa	**Ferro (feixe)**	**Madeira (m^3)**	**Telha (milheiro)**	**Tijolo (milheiro)**
Tipo 1	3	2	2	3
Tipo2	4	4	3	5
Tipo3	5	5	4	6

	Preço por Unidade de Material Fornecido em reais		
Feixe de ferro	**Madeira (m^3)**	**Telha (milheiro)**	**Tijolo (milheiro)**
500,00	600,00	400,00	300,00

Sabendo que a empresa construirá 2, 4 e 5 casas dos tipos 1, 2 e 3, respectivamente, o preço unitário de cada tipo de casa e o custo total do material fornecido, para esta primeira etapa de construção, pela empresa, em reais, é de:

a)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Custo total**
	5.200,00	7.100,00	8.900,00	83.300,00
b)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Custo total**
	4.400,00	7.100,00	9.100,00	82.700,00
c)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Custo total**
	4.400,00	7.100,00	8.900,00	81.700,00
d)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Custo total**
	4.400,00	7.400,00	8.900,00	82.900,00
e)	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Custo total**
	4.500,00	7.100,00	8.800,00	82.400,00

29) (ENEM) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	9,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

30) (UFF) Nos processos de digitalização, imagens podem ser representadas por matrizes cujos elementos são os algarismos 0 e 1.

Considere que a matriz linha L=(1 0 1 0 0 1) representa a figura a seguir:

Onde 1 representa “quadrinho” escuro e 0 representa “quadrinho” branco.

Seja X a matriz dada por X = LM, onde M é a matriz M = (m_{ij}) com

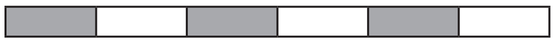
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i + j = 7 \\ 0, \text{ se } i + j \neq 7, \quad 1 \leq i \leq 6, \quad 1 \leq j \leq 6. \end{cases}$$

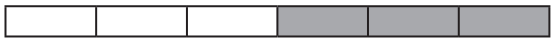
Dessa forma, a matriz X representa a figura da opção:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

31) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

32) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

33) Resolva a a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix}$$

34) (UERJ) Observe a matriz a seguir.

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos^2 x & 1 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo seu determinante, será obtido o seguinte resultado:

a) 1
b) sen x
c) $\operatorname{sen}^2 x$
d) $\operatorname{sen}^3 x$

35) (UERJ) Para a realização de um baile, foi veiculada a seguinte propaganda:

Sexta-feira - 8 de setembro
às 22 horas

ingressos antecipados

DAMAS	CAVALHEIROS
R$ 6,00	R$ 8,00

Após a realização do baile, constatou-se que 480 pessoas pagaram ingressos, totalizando uma arrecadação de R$ 3.380,00.

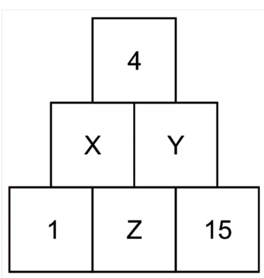
Calcule o número de damas e de cavalheiros que pagaram ingresso nesse baile.

36) (ENEM) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo deverá pagar R$10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30
b) 36
c) 50
d) 60
e) 64

37) (UERJ) A ilustração abaixo mostra seis cartões numerados organizados em três linhas. Em cada linha, os números estão dispostos em ordem crescente, da esquerda para a direita. Em cada cartão, está registrado um número exatamente igual à diferença positiva dos números registrados nos dois cartões que estão imediatamente abaixo dele. Por exemplo, os cartões 1 e Z estão imediatamente abaixo do cartão X.



Determine os valores de X, Y e Z.

38) (ENEM) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) 5X – 3Y + 15 = 0
b) 5X – 2Y + 10 = 0
c) 3X – 3Y + 15 = 0
d) 3X – 2Y + 15 = 0
e) 3X – 2Y + 10 = 0

39) (UERJ) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$65,00. Veja na tabela os preços da água por embalagem:

Volume da embalagem (L)	Preço (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a n.

O valor de n é um divisor de:

a) 32
b) 65
c) 77
d) 81

40) (UERJ) Um conjunto de 100 copos descartáveis, dispostos em um suporte, será usado em uma festa.

Considere, agora, as seguintes informações:

– sempre se tenta retirar apenas 1 copo de cada vez desse suporte;

– quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 2 saem juntos, 1 deles é desperdiçado;

– quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 3 saem juntos, 2 deles são desperdiçados;

– quando se tenta retirar 1 copo, nunca saem 4 ou mais de 4 juntos;

– foram retirados todos os copos desse suporte, havendo desperdício de 35% deles;

– a razão entre o número de vezes em que foram retirados exatamente 2 copos juntos e o número de vezes em que foram retirados exatamente 3 juntos foi de 3/2.

O número de vezes em que apenas 1 copo foi retirado do suporte é igual a:

a) 30 c) 40
b) 35 d) 45

41) (ENEM) *O Indicador do Cad Único (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), TC = NV/NF, TA = NA/NV em que NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do Cad Único, NF é o número de famílias estimadas como público alvo do Cad Único e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do Cad Único.*

(Portaria n° 148 de 27 de abril de 2006 [Adaptado])

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5. Se NA + NV = 3.600, então NF é igual a:

a) 10.000 d) 4.500
b) 7.500 e) 3.000
c) 5.000

42) (UERJ) Três barracas de frutas, B_1, B_2 e B_3, são propriedades de uma mesma empresa. Suas vendas são controladas por meio de uma matriz, na qual cada elemento b_{ij} representa a soma dos valores arrecadados pelas barracas B_i e B_j, em milhares de reais, ao final de uma determinado dia de feira.

$$B = \begin{bmatrix} x & 1,8 & 3,0 \\ a & y & 2,0 \\ d & c & 7 \end{bmatrix}$$

Calcule, para esse dia, o valor, em reais:

a) arrecadado a mais pela barraca B_3 em relação à barraca B_2;
b) arrecadado em conjunto pelas três barracas.

43) (UFSCar) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja:

a) R$ 30,50
b) R$ 31,40
c) R$ 31,70
d) R$ 32,30
e) R$ 33,20

44) (UERJ) Uma família deseja organizar todas as fotos de uma viagem em um álbum com determinado número de páginas, sem sobra de fotos ou de páginas. Para isso, foram testados dois critérios de organização.

O primeiro critério, que consistia na colocação de uma única foto em cada página, foi descartado, uma vez que sobraram 50 fotos.

Com a adoção do segundo critério, a de uma única foto em algumas páginas e de três fotos nas demais, não sobraram fotos nem páginas, e o objetivo da família foi alcançado.

O número total de páginas em que foram colocadas três fotos é igual a:

a) 15 c) 50
b) 25 d) 75

45) (UFRJ) Um buquê contém flores, entre as quais rosas vermelhas. Se retirarmos todas as flores de cor vermelha, restarão 14 flores. Se retirarmos todas as rosas, restarão 17 flores. Se retirarmos todas as flores que não são vermelhas, restarão 19 flores e, se retirarmos todas as rosas vermelhas, restarão 26 flores.

Determine o número de flores desse buquê e o número de rosas que não são vermelhas.

DESAFIANDO

46) (CEFET) Cinco amigos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 viajaram juntos num fim de semana e, durante a viagem, as despesas foram divididas igualmente entre eles. Entretanto, para facilitar o troco, algumas vezes um emprestava dinheiro para o outro.

Considere que nas matrizes S e D abaixo, estão registrados os valores, em reais, que cada um emprestou para o outro no sábado e no domingo, respectivamente, sendo que o elemento da linha e da coluna j representa o que o amigo A_j emprestou ao amigo A_j nesse dia, com i e j variando de 1 a 5.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 15 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 & 10 \\ 15 & 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 18 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao final da viagem, o amigo A4 ainda devia aos demais amigos, em reais, a quantia de:

a) 10
b) 15
c) 31
d) 41
e) 72

47) Chamamos de autovalor associado à uma matriz A os valores de t tais que det(A – t) = 0, onde I é a matriz identidade. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

E determine:

a) A matriz A – t
b) Os autovalores de A.

48) (UPE) Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?

a) 5 reais
b) 8 reais
c) 10 reais
d) 15 reais
e) 24 reais

RESUMINDO

- Chama-se matriz do tipo m x n (lemos "m por n") toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas;
- Nas matrizes quadradas temos a **diagonal principal** e a **diagonal secundária**;

diagonal secundária

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal principal

- O produto de A por B é a matriz C, onde cada elemento c_{ij} é o produto da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B. Para existir o produto A . B, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B ($A_{mxn} \cdot B_{nxp} = (AB)_{mxp}$)
- Uma matriz quadrada A de ordem possui inversa se, e somente se, existe uma matriz B, tal que A . B = B . A = i_n;
- Cálculo de determinantes:

Matrizes 2x2

diagonal secundária

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cd$$

diagonal principal

Matrizes 3x3

$$\begin{array}{ccccc} & & -gec & -hla & -idb \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ & & aei & bfg & cdh \end{array}$$

LÓGICA E PROBLEMAS DE RACIOCÍNIO

(Disponível em: www.istockphoto.com/br. Acesso em: março de 2017)

Objetivos de aprendizagem:

- Elaborar um modelo que estruture o raciocínio de forma lógica, através de proposições;
- Utilizar conectivos para encadear proposições;
- Estabelecer a tabela-verdade para analisar a lógica matemática;
- Conhecer e aplicar conceitos de negação, equivalência e a estrutura condicional;
- Resolver problemas de lógica matemática e questões de raciocínio matemático simples.

Vestibulares atuais

(Disponível em: http://tvj1.com.br/nacionais/noticias/nao-existe-improviso-no-enem-diz-presidente-do-inep.html. Acesso em: março de 2017)

Não somente nos vestibulares atuais, mas nos concursos públicos em geral, é cada vez mais comum, questões que dependem apenas do raciocínio lógico do aluno, isto é, questões que não exigem fórmulas decoradas para sua resolução, e sim, a capacidade do candidato de interpretar e organizar informações, para a partir daí, chegar a conclusões lógicas. E é isso que nós faremos aqui.

1) Questões de raciocínio

A seguir, mostraremos como resolver algumas questões de raciocínio lógico.

Exemplo:

(UERJ) Uma campanha de supermercado permite a troca de oito garrafas vazias, de qualquer volume, por uma garrafa de litro cheia de guaraná. Considere uma pessoa que, tendo 96 garrafas vazias, fez todas as trocas possíveis. Após esvaziar todas as garrafas que ganhou, ela também as troca no mesmo supermercado.

Se não são acrescentadas novas garrafas vazias, o total máximo de litros de guaraná recebidos por essa pessoa em todo o processo de troca equivale a:

a)12 *c) 14*
b) 13 *d) 15*

Resolução:

A pessoa inicialmente foi até o mercado com 96 garrafas vazias e, a cada 8 vazias trocou por 1 litro de refrigerante. Logo, 96 ÷ 8 = 12 litros na primeira troca.

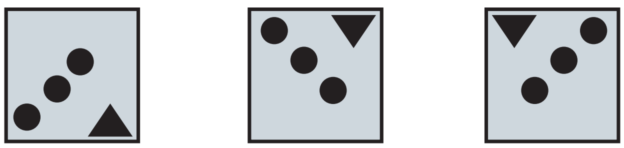
Após esvaziar as 12 garrafas recebidas, retornou ao mercado e trocou as 12 garrafas por mais um litro de refrigerante (pois apenas a cada 8 garrafas vazias é possível fazer a troca).

Assim, ao final das trocas a pessoa teria recebido o equivalente a 12 + 1 = 13 de refrigerante.

Resposta: *Opção B*

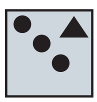
Exemplo:

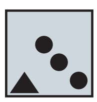
(ENEM) *Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmicas em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas indicadas por I e II.*

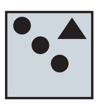


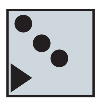
I II III

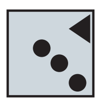
Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por III?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução:

Da figura I para a figura II foi feita a simetria em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro da figura.

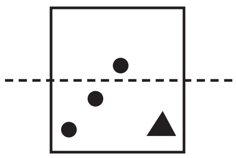


Figura I

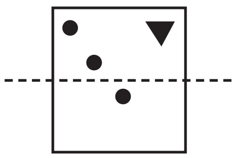


Figura II

Utilizando-se o mesmo tipo de simetria na figura III, obtemos a figura IV abaixo:

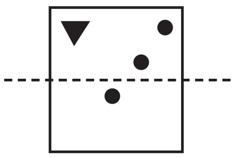


Figura III

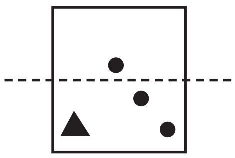


Figura IV

Resposta: *Opção B*

Exemplo:

(VUNESP) As promoções "leve 3 e pague 2" comuns no comércio, acenam com um desconto, sobre cada unidade vendida, de:

a) 50/3%

b) 20%

c) 25%

d) 30%

e) 100/3%

Resolução:

Suponha que cada unidade custa x. Então o preço de três produtos será 3x. Como a promoção é leve 3 e pague 2, ao invés de pagar 3x, será pago 2x. Fornecendo então um desconto de x sobre o preço total de 3x. Dessa forma, o percentual do desconto é equivalente ao percentual que x representa em relação a 3x. Esse percentual é

$$\frac{x}{3x} = \frac{1}{3} = \frac{100}{300} = \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{100}{3}\%$$

Resposta: *Opção E.*

Exemplo:

Um tanque tem uma torneira que é capaz de enchê-lo em 3 horas e outra que é capaz de enchê-lo em 4 horas. O ralo é capaz de esvaziá-lo em 6 horas. Com os três abertos simultaneamente, no fim de quanto tempo o tanque estará cheio.

Resolução:

A 1ª torneira é capaz de enchê-lo em 3 horas, logo em uma hora, ela enche 1/3 do tanque.

A 2ª torneira é capaz de enchê-lo em 4 horas, logo em uma hora, ela enche 1/4 do tanque.

O ralo é capaz de esvaziar o tanque em 6 horas, logo em uma hora ele esvazia 1/6 do tanque.

Juntos, todos abertos, em uma hora a fração do volume ocupado no tanque é:

1/3 + 1/4 – 1/6 = 5/12

Vamos agora usar a proporção:

5/12 → 1 hora = 60 minutos

1/12 → 12 minutos

12/12 → 144 minutos

144 minutos = 120 + 24 minutos = 2 horas e 24 minutos.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

PRATICANDO

1) Na figura a seguir os sacos de areia possuem o mesmo peso e os tijolos são idênticos. Dessa forma, quanto deve marcar a pesagem na última balança?

2) Maria faz hoje 44 anos e tem dado um duro danado para sustentar suas três filhas: Mariana, de 10 anos; Marisa, de 8 anos e Mara, de 2 anos. Maria decidiu que fará uma viagem ao Nordeste para visitar seus pais, no dia do seu aniversário, quando sua idade for igual à soma das idades de suas três filhas. Com que idade, Maria pretende fazer a viagem?

3) (ENEM) Uma escola recebeu do governo uma verba de R$1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20.

O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

a) 476
b) 675
c) 923
d) 965
e) 1.538

4) (UERJ) O código de uma inscrição tem 14 algarismos; dois deles e suas respectivas posições estão indicados abaixo.

5				8				X					

Considere que, nesse código, a soma de três algarismos consecutivos seja sempre igual a 20. O algarismo representado por x será divisor do seguinte número:

a) 49
b) 64
c) 81
d) 125

MAT0058

5) (PUC) Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que se possa garantir que neste grupo haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?

a) 16
b) 61
c) 60
d) 49
e) n.r.a.

6) (ENEM) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

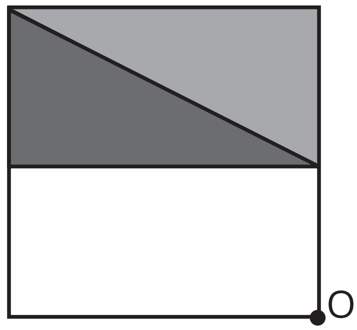
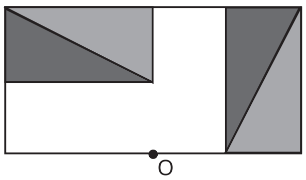


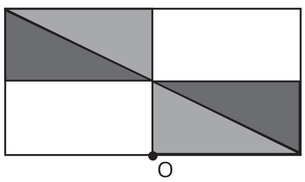
Figura original

A imagem que representa a nova figura é:

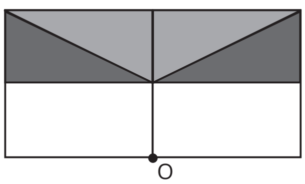
a)



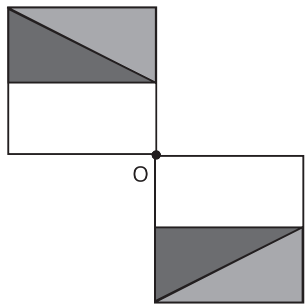
b)



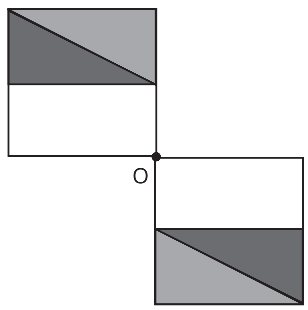
c)



d)



e)



2) Lógica

As noções de lógica servem como base para fundamentar a Matemática. É uma importante ferramenta para resolução de diversas questões de raciocínio que são muito abordadas em concursos. Estudaremos agora seus princípios básicos.

Como IMC pode cair no ENEM?

MAT0057

A saúde, além de ser assunto básico da vida de qualquer ser humano, tem sido foco de atenção pela crescente busca pela adequação à padrões estéticos impostos pela sociedade. O IMC, como um dos principais índices de controle de gordura adotados pelos médicos, é amplamente utilizado. E como sua relação com a matemática é estreita, pela proporção de medidas como altura e massa, deve receber espaço no estudo, juntamente com outras métricas semelhantes.

(ENEM) A figura apresenta informações biométricas de um homem (Duilio) e de uma mulher (Sandra) que estão buscando alcançar seu peso ideal a partir das atividades físicas (corrida). Para se verificar a escala de obesidade, foi desenvolvida a fórmula que permite verificar o Índice de Massa Corporal (IMC). Esta fórmula é apresentada como IMC = m/h^2, onde m é a massa em quilogramas e h é a altura em metros.

O perfil dos novos corredores

DUILIO SABA	
Idade	50 anos
Altura	1,88 metro
Peso	96,4 quilos
Peso ideal	94,5 quilos

SANDRA TESCARI	
Idade	42 anos
Altura	1,70 metro
Peso	84 quilos
Peso ideal	77 quilos

(*Veja*. 2008. Edição 2055 [Adaptado].)

No quadro, é apresentada a Escala de Índice de Massa Corporal com as respectivas categorias relacionadas aos pesos.

Escala de Índice de Massa Corporal	
CATEGORIAS	**IMC (kg/m²)**
Desnutrição	Abaixo de 14,5
Peso abaixo do normal	14,5 a 20
Peso normal	20 a 24,9
Sobrepeso	25 a 29,9
Obesidade	30 a 39,9
Obesidade mórbida	Igual ou acima de 40

(*Nova Escola*. nº 172, maio de 2004)

A partir dos dados biométricos de Duilio e Sandra e da Escala de IMC, o valor IMC e a categoria em que cada uma das pessoas se posiciona na escala são:

a) Duilio tem o IMC 26,7 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso;

b) Duilio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 29,1, estando ambos na categoria de sobrepeso;

c) Duilio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso;

d) Duilio tem o IMC 25,6, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 24,7, estando na categoria de peso normal;

e) Duilio tem o IMC 25,1, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 22,6, estando na categoria de peso normal.

Gabarito: B

Como pode cair no ENEM?

2.1) Proposição

Definiremos proposição como toda afirmação que pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

Exemplo:

a) O número 4 é ímpar;

b) 1 + 1 = 2;

c) O Brasil está situado no planeta Terra.

2.2) Negação

A partir de uma proposição **p** qualquer sempre podemos construir outra com valor lógico contrário ao de p. Essa proposição com valor lógico contrário será chamada de negação de p, e simbolizada por **~p**.

Dessa forma:

Quando p é verdadeira, ~p é falsa.

Quando p é falsa, ~p é verdadeira.

Como na tabela a seguir:

p	~p
V	F
F	V

PRATICANDO

7) A negação de $x \geq -2$ é:

a) $x \geq 2$
b) $x \leq -2$
c) $x < -2$
d) $x < 2$
e) $x \leq 2$

2.3) Proposições compostas

A partir de proposições dadas podemos formar novas proposições, utilizando alguns símbolos.

2.3.1) Proposições compostas por conectivos

Conectivo $\wedge$ (lê-se "e")

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições, obtemos uma nova proposição denominada conjunção, simbolizada por $p \wedge q$.

Exemplo:

p: 5 > 1
q: 5 ≠ 8
$p \wedge q : 5 > 1 \text{ e } 5 \neq 8$

Observação

Postularemos que, a conjunção $p \wedge q$ só será verdadeira quando ambas as proposições p e q forem verdadeiras. Dessa forma, temos a tabela que fornece todas as possibilidades.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conectivo V (lê-se "ou")

Colocando o conectivo V entre duas proposições, obtemos uma nova proposição denominada disjunção, simbolizada por p V q.

Exemplo:

p: 2 é par
q: 2 ≠ 3
p V q : 2 é par ou 2 ≠ 3

Observação

Postularemos que, para que a disjunção p V q seja verdadeira, basta que uma das proposições seja verdadeira. Dessa forma, a disjunção p V q só será falsa quando as duas proposições forem falsas.

A tabela a seguir nos fornece todas as possibilidades.

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2.3.2) Proposições compostas por condicionais

Condicional "se...então..." (símbolo: $\rightarrow$)

Colocando o condicional "$\rightarrow$" entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição $p \rightarrow q$. (Lê-se: Se p então q)

Na condicional "$p \rightarrow q$", diz-se que p é o antecedente e q o consequente.

Exemplo:

p: 2 < 4
q: 4 < 6
$p \rightarrow q: 2 < 4 \rightarrow 4 < 6$

Observação

Vamos postular que, o condicional $p \rightarrow q$ será falso, somente quando p é verdadeira e q é falsa.

A seguir temos a tabela que nos fornece todas as possibilidades.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional "se, e somente se" (símbolo: $\leftrightarrow$)

Colocando o bicondicional "$\leftrightarrow$" entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição $p \leftrightarrow q$. (Lê-se: "p se, e somente se, q")

Exemplo:

p: $1 < 3$

q: $3 < 7$

$p \leftrightarrow q$: $1 < 3 \leftrightarrow 3 < 7$

Observação

Vamos postular que, o bicondicional $p \leftrightarrow q$ será verdadeiro, somente quando ambas as proposições forem verdadeiras.

A seguir temos a tabela que nos fornece todas as possibilidades.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.4) Relação de equivalência (símbolo: $\leftrightarrow$)

Dizemos que duas proposições são equivalentes quando possuem tabelas-verdade iguais, isto é, quando possuem o mesmo valor lógico.

Uma relação de equivalência muito importante é:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

A partir dessa relação podemos chegar a conclusões muito importantes para resolução de problemas de lógica.

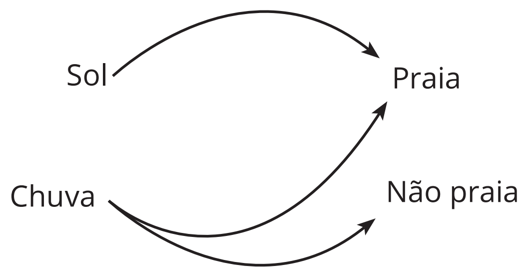
Exemplo:

"Se fizer sol amanhã, então nós iremos à praia".

Essa proposição é equivalente a:

"Se nós não fomos à praia, então não fez sol".

A seguir temos um esquema dessa situação:



Note que, se fomos à praia não necessariamente significa que fez sol!

PRATICANDO

8) (UFF) Na cidade litorânea de Loretin, é rigorosamente obedecida a seguinte ordem do prefeito:

Se não chover, então todos os bares à beira-mar deverão ser abertos.

Pode-se afirmar que:

a) se todos os bares à beira-mar estão abertos, então choveu;
b) se todos os bares à beira-mar estão abertos, então não choveu;
c) se choveu, então todos os bares à beira-mar não estão abertos;
d) se choveu, então todos os bares à beira-mar estão abertos;
e) se um bar à beira-mar não está aberto, então choveu.

MAT0060

9) Cada um dos cartões abaixo tem de um lado um número e do outro lado uma letra.

A	B	2	3

Alguém afirmou que todos os cartões que têm uma vogal numa face têm um número par na outra. Para verificar se tal afirmação é verdadeira:

a) é necessário virar todos os cartões;
b) é suficiente virar os dois primeiros cartões;
c) é suficiente virar os dois últimos cartões;
d) é suficiente virar os dois cartões do meio;
e) é suficiente virar o primeiro e o último cartão.

2.5) Negação de proposições compostas

Faremos agora, a negação de algumas proposições compostas.

Considere duas proposições **p** e **q**.

A partir das tabelas-verdade da proposição $\sim(p \wedge q)$ e da proposição $\sim p \vee \sim q$, temos que $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. Assim, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é $\sim p \vee \sim q$.

De forma análoga, temos que:

A negação de $p \vee q$ é $\sim p \wedge \sim q$

A negação de $p \rightarrow q$ é $p \wedge \sim q$

Podemos escrever tais negações da seguinte forma:

$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$

Exemplos:

a) Proposição: $a \neq 0$ e b é par

Negação: $a = 0$ ou b é ímpar

b) Proposição: Se a divide b, então a divide c.

Negação: a divide b e a não divide c.

PRATICANDO

10) A negação de “hoje é segunda-feira e amanhã não choverá” é:

a) hoje não é segunda-feira e amanhã choverá;

b) hoje não é segunda-feira ou amanhã choverá;

c) hoje não é segunda-feira, então amanhã choverá;

d) hoje não é segunda-feira nem amanhã choverá;

e) hoje é segunda-feira ou amanhã choverá.

11) (UFRJ) João não estudou para a prova de Matemática; por conta disso, não entendeu o enunciado da primeira questão. A questão era de múltipla escolha e tinha as seguintes opções:

a) O problema tem duas soluções, ambas positivas.

b) O problema tem duas soluções, uma positiva e outra negativa.

c) O problema tem mais de uma solução.

d) O problema tem pelo menos uma solução.

e) O problema tem exatamente uma solução positiva.

João sabia que só havia uma opção correta. Ele pensou um pouco e marcou a resposta certa. Determine a escolha feita por João. Justifique sua resposta.

Como conversa entre amigos pode cair no ENEM?

MAT0059

Em qualquer situação em que pessoas encontram-se para conversar, é natural que sejam ditas diversas coisas, sobre qualquer assunto. Utilizando noções de lógica, é possível transformar a situação descrita em um problema de análise sobre quem diz verdades ou mentiras, e portanto as noções de operadores lógicos e suas respectivas negações são importantes de se saber.

Em uma roda de amigos, Jorge, Edson e Geraldo contaram fatos sobre suas namoradas. Sabe-se que Jorge e Edson mentiram e que Geraldo falou a verdade.

Assinale qual das proposições abaixo é verdadeira.

a) “Se Geraldo mentiu, então Jorge falou a verdade”.

b) “Edson falou a verdade e Geraldo mentiu”.

c) “Se Edson mentiu, então Jorge falou a verdade”.

d) “Jorge falou a verdade ou Geraldo mentiu”.

e) “Edson mentiu e Jorge falou a verdade”.

Gabarito: A

Como pode cair no ENEM?

Como organizar as finanças em caso de desemprego?

Não é recomendado depender somente da rescisão em tempos de crise

Há 10,4 milhões de desempregados no Brasil atualmente, segundo dados do IBGE. Pela situação econômica do país, é possível que esse número não diminua significativamente tão cedo. Para piorar, é praticamente consenso entre especialistas que os brasileiros têm uma educação financeira insatisfatória, o que pode ser desastroso em momentos de dificuldade e desemprego. Saiba mais em nosso portal *www.4newsmagazine.com.br.*

#educacaofinanceira#cadeagrana

APROFUNDANDO

12) (ENEM) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

a) 12kg
b) 16kg
c) 24kg
d) 36kg
e) 75kg

13) (UERJ) Em uma atividade escolar, qualquer número X, inteiro e positivo, é submetido aos procedimentos matemáticos descritos abaixo, quantas vezes forem necessárias, até que se obtenha como resultado final o número 1.

Se X é múltiplo de 3, deve-se dividi-lo por 3. Se X não é divisível por 3, deve-se calcular X – 1.

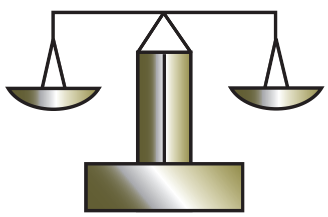
A partir de X = 11, por exemplo, os procedimentos são aplicados quatro vezes. Veja a sequência dos resultados obtidos:

10	9	3	1

Iniciando-se com X = 43, o número de vezes que os procedimentos são utilizados é igual a:

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10

14) (ENEM) Um armazém recebe sacos de açúcar de 24 kg para que sejam empacotados em embalagens menores. O único objeto disponível para pesagem é uma balança de 2 pratos, sem os pesos metálicos.

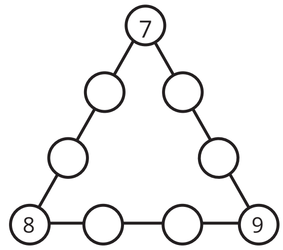


Realizando uma única pesagem, é possível montar pacotes de:
a) 3kg
b) 4kg
c) 6kg
d) 8kg
e) 12kg

15) (ENEM) Realizando exatamente duas pesagens, os pacotes que podem ser feitos são os de:
a) 3kg e 6kg
b) 3kg, 6kg e 12kg
c) 6kg, 12kg e 18kg
d) 4kg e 8kg
e) 4kg, 6kg e 8kg

16) (ENEM) A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais. Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm × 100 cm). O valor da segunda encomenda será:
a) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram;
b) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro;
c) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram;
d) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade;
e) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

17) (UERJ) No triângulo desenhado a seguir, os pequenos círculos deverão ser preenchidos com os algarismos significativos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem repeti-los, de modo que nos vértices sejam colocados os algarismos 7, 8 e 9, e que a soma dos algarismos dos 4 círculos em cada lado tenha sempre o mesmo valor.



Assim a soma será:
a) 19
b) 21
c) 23
d) 25

18) (ENEM) *O salto triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.*

(Disponível em: www.cbat.org.br [Adaptado].)

Um atleta da modalidade salto triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5m. Querendo atingir a meta de 17,4m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:
a) 4,0m e 5,0m
b) 5,0m e 6,0m
c) 6,0m e 7,0m
d) 7,0m e 8,0m
e) 8,0m e 9,0m

19) (ENEM) *A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.*

(Revista *Veja*, Ano 41, nº 25, 25 jun. 2008 [Adaptado].)

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?
a) 406
b) 1.334
c) 4.002
d) 9.338
e) 28.014

20) (UERJ) Para saber o dia da semana em que uma pessoa nasceu, podem-se utilizar os procedimentos a seguir.

I) Identifique, na data de nascimento, o dia D e o mês M, cada um com dois algarismos, e o ano A, com quatro algarismos.

II) Determine o número N de dias decorridos de 1º de janeiro até D/M.

III) Calcule Y, que representa o maior valor inteiro que não supera $\frac{A-1}{4}$.

IV) Calcule a soma S = A + N + Y.

V) Obtenha X, que corresponde ao resto da divisão de S por 7.

VI) Conhecendo X, consulte a tabela:

X	Dia da semana correspondente
0	sexta-feira
1	sábado
2	domingo
3	segunda-feira
4	terça-feira
5	quarta-feira
6	quinta-feira

O dia da semana referente a um nascimento ocorrido em 16/05/1963 é:

a) domingo;
b) segunda-feira;
c) quarta-feira;
d) quinta-feira.

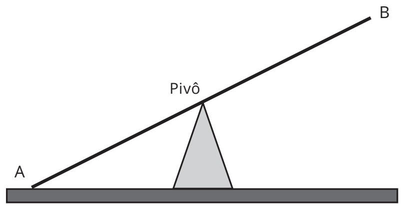
21) (ENEM) Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.

Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

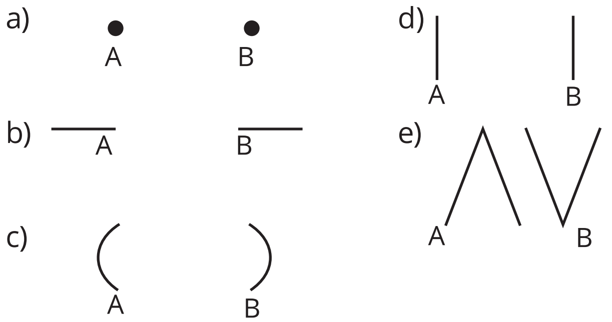
a) 37
b) 51
c) 88
d) 89
e) 91

22) (ENEM) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

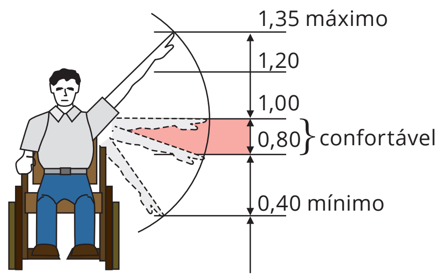
Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:



23) (ENEM) Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é:
a) 0,20m e 1,45m
b) 0,20m e 1,40m
c) 0,25m e 1,35m
d) 0,25m e 1,30m
e) 0,45m e 1,20m

24) (UERJ) Uma farmácia recebeu 15 frascos de um remédio. De acordo com os rótulos, cada frasco contém 200 comprimidos, e cada comprimido tem massa igual a 20mg. Admita que um dos frascos contenha a quantidade indicada de comprimidos, mas que cada um destes comprimidos tenha 30 mg. Para identificar esse frasco, cujo rótulo está errado, são utilizados os seguintes procedimentos:

• numeram-se os frascos de 1 a 15;
• retira-se de cada frasco a quantidade de comprimidos correspondente à sua numeração;
• verifica-se, usando uma balança, que a massa total dos comprimidos retirados é igual a 2540 mg.

A numeração do frasco que contém os comprimidos mais pesados é:
a) 12
b) 13
c) 14
d) 15

25) A negação da proposição $x \in (A \cup B)$ é:
a) $x \in (A \cap B)$
b) $x \notin A$ ou $x \notin B$
c) $x \in A$ e $x \notin B$
d) $x \notin A$ ou $x \in B$
e) $x \notin A$ e $x \notin B$

26) Raul e Cida formam um estranho casal. Raul mente às 4as, 5as e 6as feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Cida mente aos domingos, às 2as e às 3as feiras, dizendo a verdade nos outros dias.

Certo dia, ambos declararam: “amanhã é dia de mentir”. O dia em que foi feita essa declaração é:
a) terça-feira;
b) quarta-feira;
c) sexta-feira;
d) sábado;
e) domingo.

27) Se Lucas mentiu, então ele é culpado. Logo:
a) se Lucas não é culpado, então ele não mentiu;
b) Lucas é culpado;
c) se Lucas não mentiu, então ele não é culpado;
d) Lucas mentiu;
e) se Lucas é culpado, então ele mentiu.

28) (UFRRJ) Os quatro cartões abaixo têm uma letra numa face e um número inteiro na outra.

I	II	III	IV
5	C	E	6

Considere a afirmação: “Se há uma vogal em uma face, então há um número par na outra face”. Quais dos cartões acima devem ser, necessariamente, virados para que se determine se a afirmação acima é verdadeira ou falsa?
a) I e II
b) II e IV
c) II, III e IV
d) I e III
e) I, II e III

29) Depois de **n** dias de férias, um estudante observa que:
I) choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;
II) quando chove de manhã, não chove à tarde;
III) houve 5 tardes sem chuva;
IV) houve 6 manhãs sem chuva.

Então **n** é igual a:
a) 7
b) 9
c) 10
d) 11
e) n.d.a.

30) (UERJ) Rafael comprou 4 passagens aéreas para dar uma de presente para cada um de seus quatro netos. Para definir a época em que irão viajar, Rafael pediu que cada um dissesse uma frase. Se a frase fosse verdadeira, o neto viajaria imediatamente; se fosse falsa, o neto só viajaria no final do ano. O quadro a seguir apresenta as frases que cada neto falou:

NETO	FRASE
I	Viajarei para a Europa.
II	Meu voo será noturno.
III	Viajarei no final do ano.
IV	*O Flamengo é o melhor time do Brasil.*

A partir das frases ditas, Rafael não pôde definir a época da viagem do neto representado pelo seguinte número:

a) I
b) II
c) III
d) IV

31) Dadas as proposições:
I) Todas as mulheres são boas motoristas;
II) Algumas mulheres são boas motoristas;
III) Nenhum homem é bom motorista;
IV) Todos os homens são maus motoristas;
V) Pelo menos um homem é mau motorista;
VI) Todos os homens são bons motoristas.

A proposição que nega VI é:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

DESAFIANDO

32) (UERJ) As tabelas abaixo mostram os palpites de três comentaristas esportivos sobre os resultados de cinco diferentes times de futebol, em cinco partidas a serem realizadas.

Comentarista A			
Time	Empate	Vitória	Derrota
1			X
2			X
3	X		
4			X
5		X	

Comentarista B			
Time	Empate	Vitória	Derrota
1			X
2			X
3		X	
4	X		
5		X	

Comentarista C			
Time	Empate	Vitória	Derrota
1	X		
2		X	
3		X	
4			X
5		X	

O resultado de cada time foi acertado por pelo menos dois comentaristas.

Se N_A, N_B e N_C são os números de palpites certos dos comentaristas A, B e C, a relação entre eles pode ser expressa por:

a) $N_A > N_B > N_C$
b) $N_A > N_B = N_C$
c) $N_A = N_B > N_C$
d) $N_A = N_B = N_C$

33) Se Beto briga com Glória, então Glória vai ao cinema. Se Glória vai ao cinema, então Carla fica em casa. Se Carla fica em casa, então Raul briga com Carla. Ora, Raul não briga com Carla, logo:

a) Carla não fica em casa e Beto não briga com Glória;
b) Carla fica em casa e Glória vai ao cinema;
c) Carla não fica em casa e Glória vai ao cinema;
d) Glória vai ao cinema e Beto briga com Glória;
e) Glória não vai ao cinema e Beto briga com Glória.

RESUMINDO

- A negação de uma proposição p é uma proposição com sentido contrário, representada por **~p**, Tabela:

p	~p
V F	F V

- $p \wedge q$ representa a proposição "p e q", tabela:

p	q	$p \wedge q$
V V F F	V F V F	V F F F

- $p \vee q$ representa "p ou q", Tabela:

p	q	$p \vee q$
V V F F	V F V F	V V V F

- $p \rightarrow q$ representa "Se p então q", tabela:

p	q	$p \rightarrow q$
V V F F	V F V F	V F V V

- $p \leftrightarrow q$ representa "p se,e somente se, q", tabela:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V V F F	V F V F	V F F V

- Uma equivalência importante: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$;
- Negações importantes:

$$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q;$$

$$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q;$$

$$\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q.$$

TRIGONOMETRIA: CONCEITOS, CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO E FUNÇÕES

(Disponível em: http://www.istockphoto.com/br. Acesso em: agosto de 2017)

Objetivos de aprendizagem:

- Estabelecer diferentes medidas de ângulos e a relação entre elas;
- Compreender os conceitos iniciais de trigonometria a partir de triângulos retângulos;
- Conhecer o círculo trigonométrico e suas principais propriedades;
- Utilizar o círculo trigonométrico para deduzir valores trigonométricos para diversos grupos de ângulos notáveis e relações trigonométricas fundamentais;
- Analisar algébrica e graficamente equações, inequações e funções trigonométricas.

Monitores multiparamétricos

Seu coração vai bem? Essa é uma pergunta que, em geral, não nos preocupamos em responder. Principalmente quando jovens. Mas, estudar o comportamento do coração é algo que está diretamente ligado a expectativa de vida da humanidade. A evolução da medicina caminha de mãos dadas com a evolução da matemática e da tecnologia.

(Disponível em: http://www.bvnews.com.br/noticia.php?intNotID=6301. Acesso em: agosto de 2017)

Uma ferramenta matemática que auxilia a modelar o comportamento da pressão sanguínea é a função trigonométrica. Por ser uma função periódica, se ajusta muito bem para representar o comportamento do coração, que é um órgão que se comporta obedecendo um padrão, um período de repetição. Estudaremos aqui o comportamento de tais funções, começando por suas relações com triângulos.

1) Trigonometria no triângulo retângulo

No estudo de semelhança, foi abordado que, quando temos dois triângulos semelhantes, ABC e A'B'C', independente dos tamanhos dos triângulos, sempre se verifica que:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

Essas razões que podem ser extraídas nos triângulos só dependem do ângulo e não das medidas dos lados. Por exemplo, em um triângulo retângulo com um ângulo de 30°, a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30° e a hipotenusa é sempre 1/2, independente do tamanho do triângulo (provaremos isso mais adiante).

Dessa forma, fixado um ângulo agudo em um triângulo retângulo, definiremos três razões que nos ajudarão nas resoluções de diversos problemas.

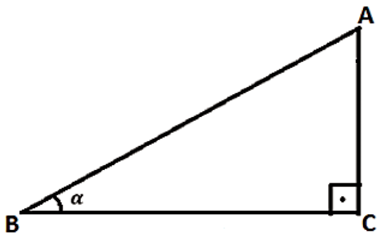
Considere um triângulo ABC tal que $A\hat{B}C = \alpha$.

Chamaremos de seno de um ângulo α razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa. Em símbolos, escreveremos sen α.

Chamaremos de cosseno de um ângulo α razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa. Em símbolos, escreveremos cos α.

Chamaremos de tangente de um ângulo a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a esse ângulo. Em símbolos, escreveremos tg α.

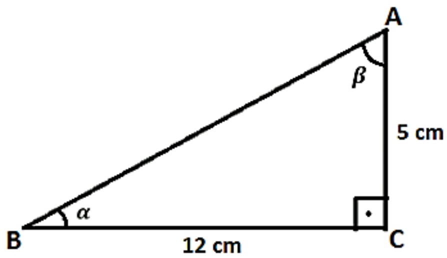
Dessa forma, teremos na figura:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AC}{AB} \qquad \cos\alpha = \frac{BC}{AB} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Exemplo:

Observe a figura:



Determine os valores de:

a) sen α

b) cos α

c) tg α

Resolução:

Temos um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm, segue do Teorema de Pitágoras que $AB^2 = 5^2 + 12^2$, assim teremos que a hipotenusa AB = 13 cm.

Da definição de seno, cosseno e tangente, teremos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13} \qquad \cos\alpha = \frac{12}{13} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$$

Para um ângulo agudo α qualquer, sempre teremos:

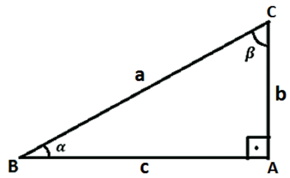
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Além disso, sempre que tivermos dois ângulos α e β complementares, isto é, $\alpha + \beta = 90°$, teremos:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}$$

- *Isto é, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complemento.*
- *A tangente de um ângulo agudo é igual ao inverso da tangente do seu complemento.*

De fato, considere o triângulo retângulo abaixo de ângulos agudos α e β.



Das definições temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{c}{b}$$

Note que $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\alpha$, isto é $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

Além disso, verifica-se no triângulo também que sen α = cos β e tg $\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}$.

Essas relações também podem ser escritas da seguinte forma:

sen α =cos(90° − α) e tgα . tg(90° − α) = 1

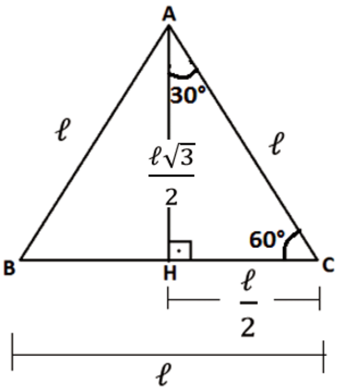
2) Ângulos notáveis

Os ângulos de 30°, 45° e 60° são chamados de notáveis pela grande frequência que aparecem nas resoluções de problemas. Segue aqui a tabela com os valores de suas razões trigonométricas:

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Demonstrações:

Considere um triângulo equilátero de lado ℓ.



Note que AH é altura do triângulo equilátero, logo AH = $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Da definição de seno, cosseno e tangente, temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\ell/2}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\ell/2}{\ell\sqrt{3}/2} \rightarrow \frac{\ell}{2} \times \frac{2}{\ell\sqrt{3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como foi abordado em observação anterior, sabemos que sen α = cos(90° − α)

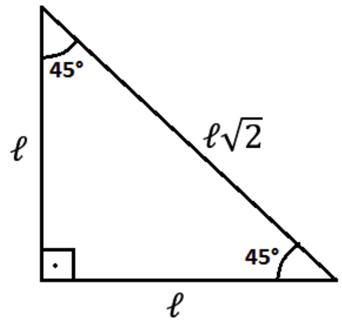
Dessa forma, sen 60° = cos 30°, logo sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Analogamente, cos 60° = sen 30°, logo cos 60° = 1/2

Também foi abordado na observação anterior que a tangente de um ângulo agudo é igual ao inverso da tangente do seu complemento. Dessa forma:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{1}{\text{tg } 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Para demonstrar as razões trigonométricas do ângulo de 45°, vamos utilizar um triângulo retângulo isósceles, cujos lados congruentes medem ℓ. Pelo Teorema de Pitágoras, teremos que a hipotenusa desse triângulo terá medida $\ell\sqrt{2}$, como na figura a seguir:



Das definições de seno, cosseno e tangente, temos:

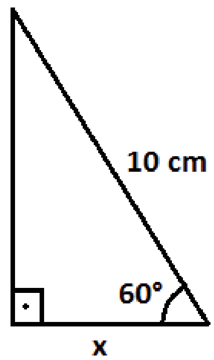
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo:
Calcule o valor de x na figura.



Resolução:
Na figura, x é o cateto adjacente ao ângulo de 60° e 10 é a hipotenusa. Como estão envolvidos no problema cateto adjacente e hipotenusa, usaremos o cosseno. Pela definição de cosseno, temos cos 60° = x/10 . Pela tabela, cos 60° = 1/2

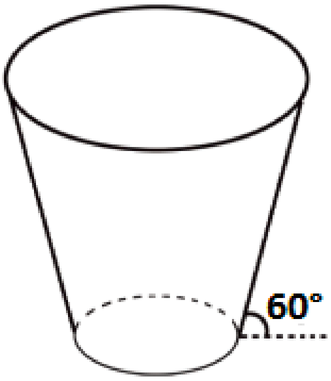
Das duas igualdades, temos:

$$\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$$

2x = 10
x = 5 cm

PRATICANDO

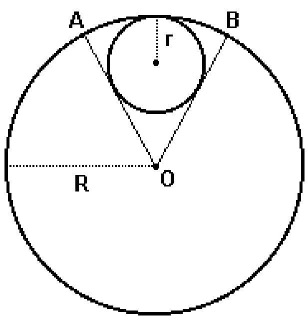
1) (ENEM) Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.



Considere que a base do reservatório tenha raio ϒ = 2√3 m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo. Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de:

a) 12π m²
b) 108π m²
c) $(12 + 2\sqrt{3})\pi$ m²
d) 300π m²
e) $(12 + 2\sqrt{3})\pi$ m²

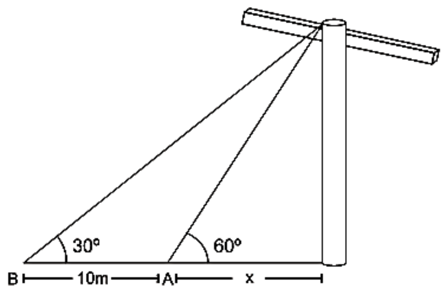
2) (UFRJ) A figura adiante mostra duas circunferências que se tangenciam interiormente. A circunferência maior tem centro em O. A menor tem raio r = 5 cm e é tangente a OA e a OB. Sabendo-se que o ângulo AÔB mede 60°, calcule a medida do raio R da circunferência maior.



Justifique.

3) (IFCS) Em uma aula prática, um professor do curso técnico de edificações do campus Florianópolis do IFSC, pede para que seus alunos determinem a altura de um poste que fica nas instalações da instituição, porém há uma impossibilidade para se chegar tanto ao topo do poste, bem como sua base. Para realizar tal medida, são disponibilizados para os alunos uma trena (fita métrica) e um teodolito. É realizado o seguinte procedimento: primeiro crava-se uma estaca no ponto A a x metros da base do poste e mede-se o ângulo formado entre o topo do poste e o solo, que é de 60º (sessenta graus); em seguida, afastando-se 10m (dez metros) em linha reta do ponto A e cravando uma nova estaca no ponto B, mede-se novamente o ângulo entre o topo do poste e o solo, que é de 30º (trinta graus).

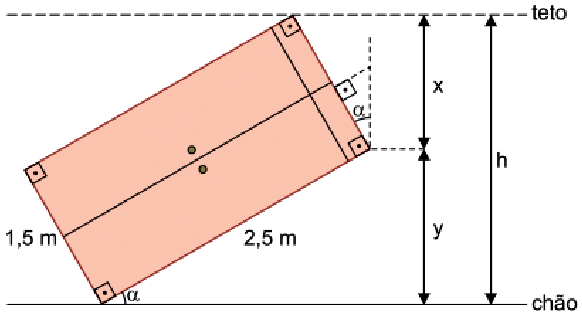
A partir do procedimento descrito e da figura abaixo, é CORRETO afirmar que a altura do poste é de aproximadamente:



Dados: sen 30º = 0,5; cos 30º = 0,86;
tg 30º = 0,58
sen 60º = 0,86; cos 60º = 0,5; tg 60º = 1,73

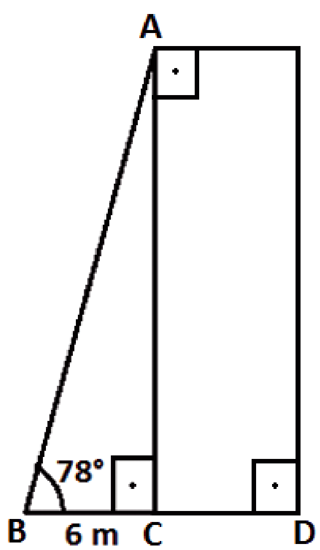
a) 8,65m
b) 5m
c) 6,65m
d) 7,65m
e) 4m

4) (UNIFESP [Adaptada]) Por razões técnicas, um armário de altura 2,5 metros e largura 1,5 metro está sendo deslocado por um corredor, de altura h metros, na posição mostrada pela figura.



Calcule h para o caso em que $\alpha = 30°$

5) José estava brincando com um Teodolito (instrumento usado para medir ângulos) e tinha em suas mãos uma tabela trigonométrica com os valores de seno e cosseno de 0° a 90°. Curioso em saber a altura do prédio em que mora, se posicionou e fez o seguinte esboço para fazer os cálculos, onde $\overline{AC}$ representa a altura do prédio e os pontos B, C e D fazem parte do chão horizontal.



José viu que em sua tabela sen 78° ≅ 0,98 e que cos 78° ≅ 0,2. Dessa forma, um valor aproximado para a altura do prédio é:

a) 22,4 m
b) 26,8 m
c) 29,4 m
d) 32,2 m
e) 36,8 m

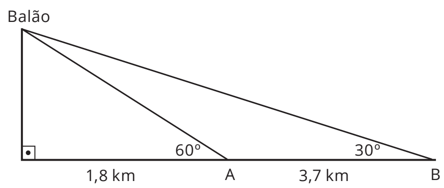
Como **balão atmosférico** pode cair no ENEM?

MAT0095

Ao posicionarmos um balão atmosférico no ar, e considerar uma pessoa que observa esse balão, claramente há a possibilidade de traduzir esse contexto para um problema matemático. A partir da construção de triângulos retângulos – geralmente o ângulo formado pela distância entre o balão e o solo –, será importante saber calcular as razões trigonométricas, para que se possa descobrir ângulos de visualização, distâncias entre objetos e pessoas etc.

(ENEM) *Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida deu-se após o cumprimento do tempo previsto de medição.*

(Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.)



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

Gabarito: C

Como pode cair no ENEM?

2.1) Medidas de ângulos

No estudo da circunferência foi abordado outra unidade de medida para ângulo, o radiano. Na ocasião, estudamos que um ângulo de 180°= π rad. O radiano é uma medida angular que será muito utilizada em trigonometria. Façamos um exercício de conversão de ângulo para relembrar.

PRATICANDO

6) Faça a conversão dos ângulos de grau para radiano.
a) 135°
b) 60°

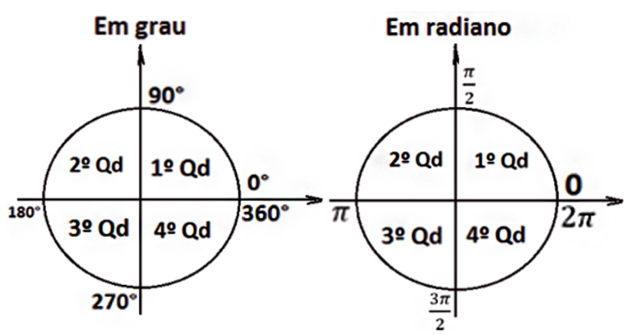
7) Faça a conversão dos ângulos de radiano para grau.

a) $\frac{2\pi}{3}$ rad

b) $\frac{\pi}{2}$ rad

3) Circunferência trigonométrica

Definiremos como circunferência trigonométrica a circunferência unitária centrada em (0, 0). Os eixos coordenados dividem essa circunferência em 4 quadrantes, como apresentado na figura a seguir.



Por definição, percorrendo a circunferência no sentido anti-horário, caminha-se no sentido positivo. Já o sentido horário é o sentido negativo.

3.1) Arcos côngruos

Sobre a circunferência pode-se dar infinitas voltas. Dessa forma, fixado um ponto qualquer sobre a circunferência, pode-se passar por ele infinitas vezes. Todos os arcos com uma extremidade nesse ponto e outra extremidade na origem, são chamados de arcos côngruos. Note que, a diferença entre dois arcos côngruos quaisquer é sempre um número múltiplo de 360°.

Considere dois arcos côngruos quaisquer α e β. Como foi dito anteriormente, se são arcos côngruos, então a diferença é um múltiplo de 360°. Podemos escrever então que:

$\alpha - \beta = \kappa \,.\, 360°, \kappa \in Z.$

$\alpha = \beta + \kappa \,.\, 360°, \kappa \in Z.$

Quando β for o menor número positivo possível, diremos que β é a primeira determinação positiva do arco α.

A expressão $\beta + \kappa \,.\, 360°$, $\kappa \,.\, Z$, é chamada de expressão geral dos arcos a α.

Em radianos a escrita fica: $\beta + \kappa \,.\, 2\,\pi, \kappa \in Z$ (já que 360° = 2π rad).

Observação

- Note que a primeira determinação positiva é sempre um arco na primeira volta.
- Alguns textos chamam a primeira determinação positiva de primeira determinação não negativa, pois dessa forma, pode-se incluir arco de medida zero.
- Para facilitar a localização e a linguagem, todas as vezes que nos referirmos a um arco de x graus (ou x radianos), a extremidade que não é a origem irá designar em que quadrante está esse arco.

PRATICANDO

8) Para cada um dos arcos seguintes:
- Dê a primeira determinação positiva;
- Determine em qual quadrante está a extremidade desse arco (extremidade que não é a origem);

• Determine quantas voltas completas foram dadas para se chegar nessa extremidade;

• Escreva a expressão geral dos arcos côngruos a esse arco.

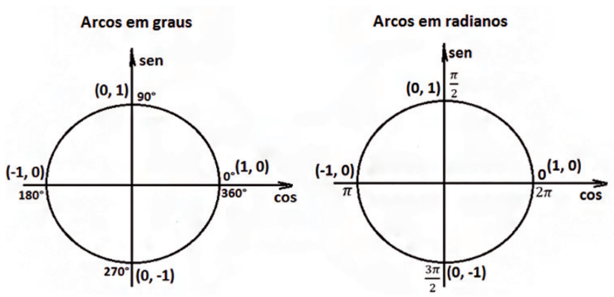
a) 780°

b) 1180°

c) $\frac{13\pi}{6}$ rad

d) −410°

4) Cosseno e seno na circunferência trigonométrica



Os valores de cosseno e seno de um arco serão obtidos de maneira análoga como é feita para os valores de x e y no plano cartesiano. Na circunferência trigonométrica, o eixo dos cossenos está sobre o eixo das abscissas (x), e o eixo seno está sobre o eixo das ordenadas (y). Como a circunferência é unitária, então os valores de cosseno e seno sempre serão no máximo 1, e no mínimo −1.

Independente se os arcos estão escritos em graus ou em radianos, os valores dos cossenos e dos senos não se alteram.

Exemplo:

Calcule o valor da soma

$$sen\ \frac{\pi}{2} + cos\ \frac{3\pi}{2} + cos\ 0 - cos\ \pi$$

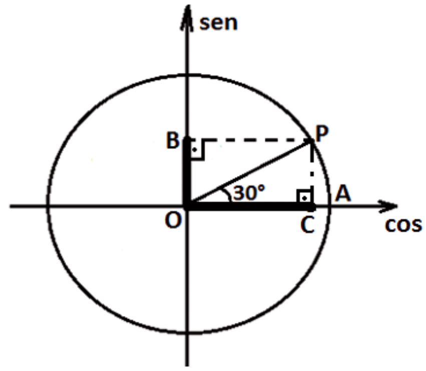
Resolução:

Com base na circunferência trigonométrica, temos:

$$sen\ \frac{\pi}{2} = 1,\ cos\ \frac{3\pi}{2} = 0,\ cos\ 0 = 1\ e\ cos\ \pi = -1$$

Substituindo, temos que a soma é igual a 1+0+1−(−1) = 3

Observe a figura a seguir:



Note que, B é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo dos senos. Dessa forma, o segmento $\overline{OB}$ representa o seno do arco de 30°. Dessa forma $\overline{OB}$ = 1/2.

Da mesma forma, C é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo dos cossenos. Assim, o segmento $\overline{OC}$ representa o cosseno de 30°. Logo $\overline{OC} = \sqrt{3}/2$.

Dessa forma, com as projeções sobre os eixos, obtém-se os valores dos cossenos e dos senos na circunferência trigonométrica. É importante salientar que, a circunferência trigonométrica possui raio 1, sendo assim, o valor máximo do cosseno será 1, e o valor mínimo será –1. De maneira análoga, o valor máximo do seno também é 1 e o valor mínimo do seno é –1.

PRATICANDO

9) Calcule o valor da soma sen 0 − cos 2π + sen 3π/2 − senπ.

10) Bruno e Breno são dois irmãos loucos por videogame, e sempre brigam para disputar quem vai jogar mais tempo. Para acabar com essa confusão, criaram uma maneira de decidir quanto tempo cada um irá jogar. Colocaram vários valores de cosseno e seno em pedacinhos de papéis dentro de uma urna, e cada um irá retirar cinco desses pedacinhos. O objetivo será somar os valores que aparecerem nos papéis. O resultado da soma será o número de partidas de 30 minutos que cada um irá jogar.

Breno retirou os pedaços com os seguintes valores: cos π/2, sen 3π/2, cos 2π, sen π e cos 0.

Bruno retirou os pedaços com os seguintes valores: sen π/2, cos π/2, cos 0, sen 2π e sen 3π/2.

Pode-se afirmar que:

a) Breno jogará 30 minutos a mais do que Bruno;
b) Breno jogará 60 minutos a mais do que Bruno;
c) Bruno jogará 30 minutos a mais do que Bruno;
d) Bruno jogará 60 minutos a mais do que Bruno;
e) Os dois jogarão tempos iguais.

Como satélite de telecomunicação pode cair no ENEM?

MAT0096

A órbita de um satélite pode ser cobrada no ENEM ao ser apresentado um modelo que descreve sua trajetória em função do tempo. Essa função, no entanto, pode ter sua natureza determinada pela própria questão, e na que é apresentada a seguir foi encontrada uma maneira bastante importante e útil de se aplicar alguns conceitos iniciais de círculo trigonométrico.

(ENEM) Um satélite de telecomunicações, **t** minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de **t** seja dado por:

$$r(t) = \frac{5865}{1+0{,}15.\cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12.765 km
b) 12.000 km
c) 11.730 km
d) 10.965 km
e) 5.865 km

Gabarito: B

Como pode cair no ENEM?

5) Razões trigonométricas

No estudo do triângulo retângulo, foi mostrado que para um ângulo agudo α, tem-se tg α = sen α / cos α. No estudo da circunferência trigonométrica, essa igualdade mantém-se verdadeira, e estende-se também para qualquer α real, desde que cos $\alpha \neq 0$.

Definiremos também outras três razões trigonométricas:

Cotangente é o inverso da tangente, Secante é o inverso do cosseno e Cossecante é o inverso do seno.

Dessa forma, para um arco α, podemos escrever essas razões da seguinte forma:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Pode-se também escrever:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

Todas as razões acima são sempre válidas, desde que o denominador seja diferente de zero.

PRATICANDO

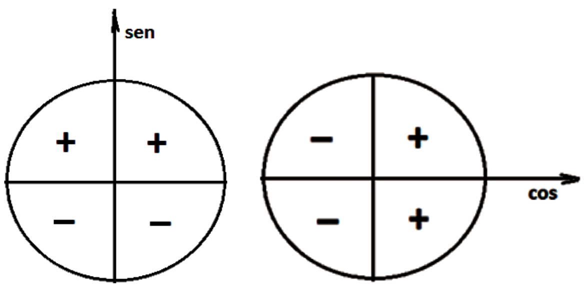
11) Preencha a segunda coluna de acordo com a primeira.

I) sen $\pi/3$	( ) 1/2
II) cos $\pi/3$	( ) $\sqrt{3}$
III) tg $\pi/3$	( ) $\sqrt{3}/2$
IV) cotg $\pi/3$	( ) $2\sqrt{3}/3$
V) sec $\pi/3$	( ) 2
VI) cossec $\pi/3$	( ) $\sqrt{3}/3$

6) Sinais do cosseno e do seno

Como o eixo dos cossenos está sobre o eixo das abscissas, é natural que os valores dos cossenos dos arcos estejam de acordo com os sinais das abscissas. Dessa forma, o cosseno será positivo no 1º e no 4º quadrantes, e será negativo no 2º e no 4º quadrantes.

Da mesma forma, como o eixo dos senos está sobre o eixo das ordenadas, os valores dos senos estarão de acordo com os sinais das ordenadas, que são positivos no 1º e 2º quadrantes, e negativos no 3º e 4º quadrantes. Segue abaixo a representação desses sinais.

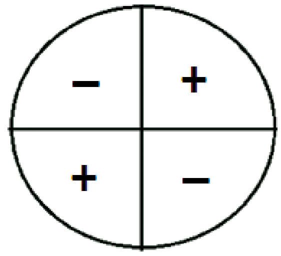


7) Sinais das razões trigonométricas

Como os arcos podem percorrer toda a circunferência trigonométrica, então a posição do quadrante vai influenciar nos sinais das razões trigonométricas. Montaremos os quadros de sinais a partir das definições dessas razões.

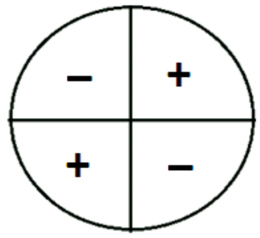
7.1) Sinais da tangente

Note que a tangente é a razão entre o seno e o cosseno. Como no 1° quadrante o seno e o cosseno são positivos, segue que a tangente será a razão entre dois valores positivos, que resultará em um valor positivo. Seguindo essa mesma ideia determina-se os sinais em todos os quadrantes.



7.2) Sinais da cotangente

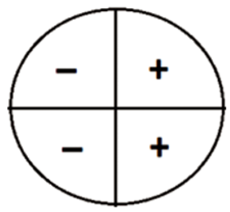
A determinação dos sinais ocorre com o mesmo raciocínio, usando o fato de que cotangente é a razão entre o cosseno e seno.



Note que os sinais da cotangente são os mesmos sinais da tangente. Isso porque, como foi definido anteriormente, a cotangente é o inverso da tangente.

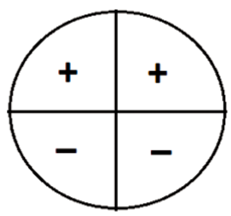
7.3) Sinais da secante

A secante é, por definição, o inverso do cosseno. Logo terá os mesmos sinais do cosseno.



7.4) Sinais da cossecante

Como a cossecante foi definida sendo o inverso do seno, os sinais da cossecante serão os mesmos sinais do seno.



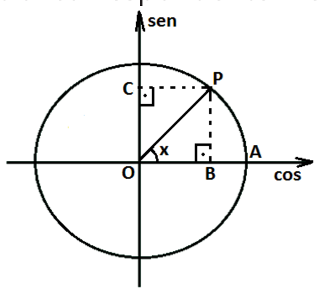
8) Relações fundamentais

A relação fundamental da trigonometria nos diz que, para qualquer arco x, tem-se:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Demonstração:

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ como na figura, cujo ângulo central correspondente mede x.



Sejam B e C, respectivamente, as projeções ortogonais do ponto P sobre os eixos do cosseno e do seno. Como temos uma circunferência trigonométrica, então o raio do círculo é 1. Pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo BOP temos:

$\overline{BO}^2 + \overline{BP}^2 = 1^2$

Mas $\overline{BO}$ = cos x e $\overline{BP} = \overline{CO}$ = sen x. Substituindo na equação anterior, segue:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Como queríamos demonstrar.

A partir dessa igualdade, podemos obter mais duas igualdades muito úteis em trigonometria.

De fato, se dividirmos toda equação por $\cos^2 x$, teremos:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Como sen x/cos x = tg x e 1/cos x = sec x, substituindo temos:

$$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

E procedendo de maneira análoga, mas dividindo a igualdade fundamental por $\sin^2 x$, obtemos:

$$\text{cotg}^2 x + 1 = \text{cossec}^2 x$$

Exemplo:

Sabendo que sen x = 3/5 e que $\pi/2 < x < \pi$, determine o valor do cos x.

Resolução:

Da relação fundamental, temos que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Como sen x = 3/5 , substituindo da igualdade teremos,

$(3/5)^2 + \cos^2 x = 1$

$9/25 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 16/25$

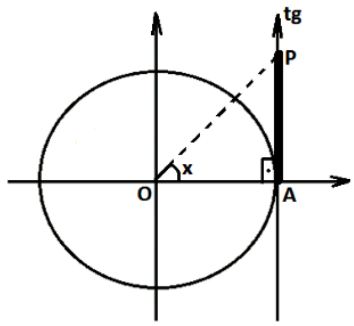
$\cos x = \pm 4/5$

Mas como $\pi/2 \leq x \leq \pi$, temos que o cossenos no 2º quadrante é negativo, logo cos x = –4/5 .

9) Linhas trigonométricas na circunferência

9.1) Tangente e secante

Já foi abordado os eixos que representam os valores dos cossenos e dos senos na circunferência trigonométrica. Definiremos agora, o eixo que representa os valores das tangentes, como segue na figura.



Na figura, o segmento $\overline{AP}$ representa o valor da tangente do arco de medida x. $\overline{AO}$ é um raio dessa circunferência, logo $\overline{AO}$ = 1. Dessa forma, AOP é um triângulo retângulo de catetos $\overline{AP}$ = tg x e $\overline{AO}$ = 1. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AP}^2 + \overline{AO}^2 = \overline{OP}^2$

Substituindo os valores de $\overline{AP}$ e $\overline{AO}$, temos $\text{tg}^2 x + 1 = \overline{OP}^2$

Mas já foi provado anteriormente que:

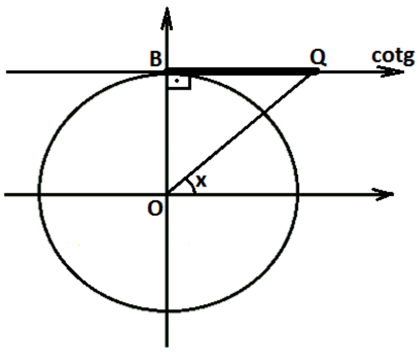
$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

Logo, na circunferência trigonométrica, $\overline{OP} = \sec x$

Note que, da forma como foi construída, a tangente de um arco pode assumir qualquer valor real. Já a secante, quando positiva, sempre terá valor maior do que ou igual a 1. E quando a secante for negativa, sempre terá valor menor do que ou igual a –1.

9.2) Cotangente e cossecante

A reta suporte do eixo das cotangentes é uma reta paralela ao eixo dos cossenos, no ponto B = (0, 1), como na figura a seguir.



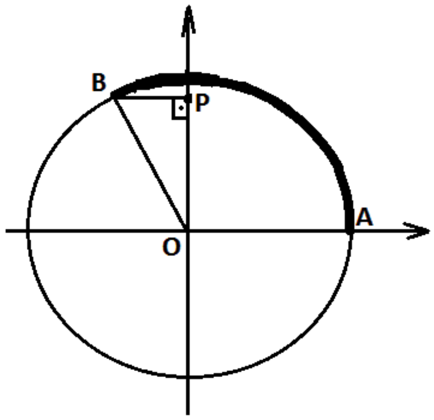
Usando a mesma ideia que foi feita com a tangente e a secante, temos aqui, que o segmento $\overline{BQ}$ representa o valor da cotangente do arco de medida x, e o segmento $\overline{OQ}$ representa a cotangente do arco de medida x.

De modo análogo como foi abordado na observação anterior, a cotangente de um arco pode assumir qualquer valor real. Já a cossecante, quando positiva, sempre terá valor maior do que ou igual a 1. E quando a cossecante for negativa, sempre terá valor menor do que ou igual a −1.

PRATICANDO

12) Sabendo que cotg x = 2, e $\pi < x < 3\pi/2$, calcule o valor de cossec x.

13) A figura a seguir representa a circunferência trigonométrica e P é a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo das ordenadas.



Sabendo que $\overline{OP} = \sqrt{3}/2$, determine o valor da tangente do arco assinalado que sudtende o ângulo central AÔB.

14) (UFF) Considere o ângulo $\theta \neq k/2$, $k \in Z$. Sobre o produto:

$\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{cotg}\theta \cdot \sec\theta \cdot \operatorname{cossec}\theta$

Pode-se afirmar que é igual a:

a) 1
b) $\sqrt{3}/2$
c) 0
d) $-\sqrt{2}/2$
e) –1

15) (UFGS) Considerando os valores de θ, para os quais a expressão $\operatorname{sen}\theta/\csc\theta + \cos\theta/\sec\theta$ é definida, é **correto** afirmar que ela sempre está igual a:

a) 1
b) 2
c) senθ
d) cosθ

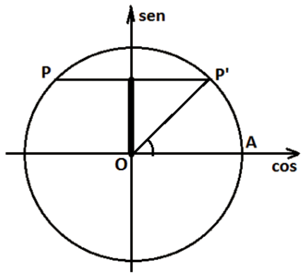
10) Redução ao 1º quadrante

O objetivo agora é conseguir calcular os valores das razões trigonométricas quando os arcos correspondentes não estão no 1º quadrante. Dessa forma, vamos sempre tentar relacionar o arco dado com um arco do 1º quadrante, onde estão os ângulos notáveis.

Em geral serão três situações:

10.1) Redução do 2º para o 1º quadrante

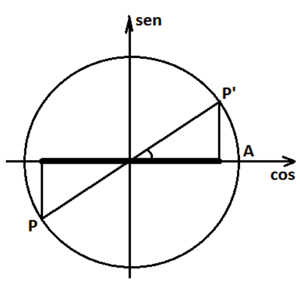
Considere um ponto P que é a extremidade de um arco no 2º quadrante. Seja P’ o seu simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Dessa forma, ambos os arcos, $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AP'}$ possuem o mesmo valor de seno, como é apresentado na figura. E assim, terão todas as outras razões trigonométricas com os mesmos valores em módulo, isto é, dependendo da razão trigonométrica, apenas o sinal será alterado.



Exemplo: *sen120° = sen60° =* $\sqrt{3}/2$
cos120°= –cos60° = –1/2
tg120°= –tg60°= $-\sqrt{3}$

10.2) Redução do 3º para o 1º quadrante

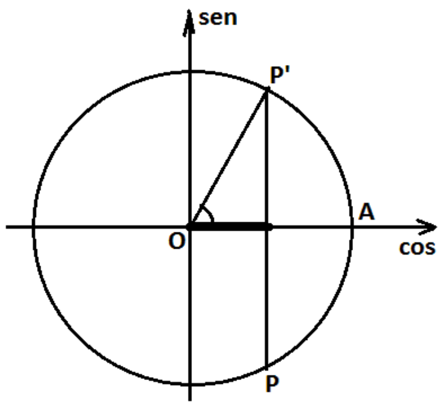
Considere um ponto P que é a extremidade de um arco no 3º quadrante. Seja P’ o seu simétrico em relação a origem do plano cartesiano. Dessa forma, ambos os arcos, $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AP'}$ possuem o mesmo valor de cosseno em modulo, como é apresentado na figura. E assim, terão todas as outras razões trigonométricas com os mesmos valores em módulo, isto é, dependendo da razão trigonométrica, apenas o sinal será alterado.



Exemplo: *sen 210° = – sen 30° = −1/2* →
cos 210° = −cos 30° = $-\sqrt{3}/2$
tg 210° = tg 30° = $\sqrt{3}/3$

10.3) Redução do 4º para o 1º quadrante.

Considere um ponto P que é a extremidade de um arco no 4º quadrante. Seja P’ o seu simétrico em relação ao eixo das abscissas. Dessa forma, ambos os arcos, $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AP'}$ possuem o mesmo valor de cosseno, como é apresentado na figura. E assim, terão todas as outras razões trigonométricas com os mesmos valores em módulo, isto é, dependendo da razão trigonométrica, apenas o sinal será alterado.



Exemplo:
sen 300° = – sen 60° = $\sqrt{3}/2$
cos 300°= cos 60° = 1/2
tg 300° = – tg 60° = $-\sqrt{3}$

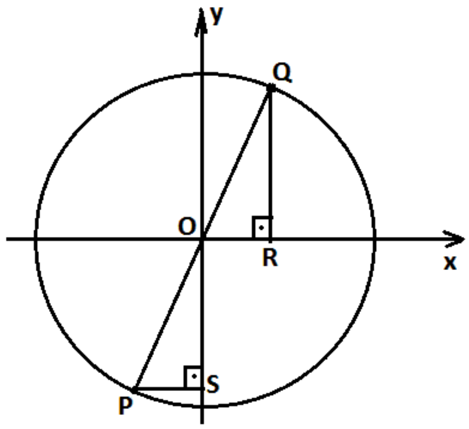
PRATICANDO

16) Calcule o valor de cos 240°.

17) Calcule o valor da soma expressão:

$$E = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\text{sen}\left(\frac{9\pi}{2}\right)}$$

18) Na figura a seguir P e Q são pontos sobre uma circunferência trigonométrica de centro O, e os pontos P, O e Q são colineares.



Sabendo que PÔS = 30°, o valor da razão OS/OR é:

a) 1

b) 1/2

c) 2

d) $\sqrt{3}$

e) $\sqrt{3}/2$

11) Adição e subtração de arcos

Em geral, não podemos escrever o seno da soma de dois arcos, como a soma dos senos desses arcos. Com o cosseno e a tangente, também não. Em situações como essa, precisamos das fórmulas de adição e subtração de arcos que serão apresentadas a seguir.

11.1) Cosseno

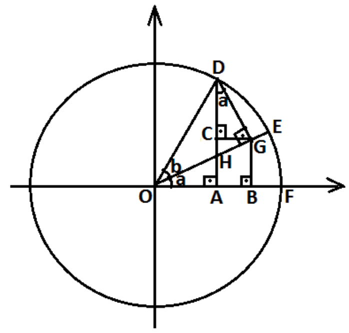
cos(a+b) = cosa . cos b – sen a . sen b

cos(a–b) = cos a . cos b + sen a . sen b

Demonstração:

Na figura, temos uma circunferência trigonométrica. Na construção feita, DG é perpendicular a OE, e CG é perpendicular a AD. Além disso:

cos(a + b) = OA = OB – OA



No triângulo ODG, temos:

cos b = OG/1 → OG = cos b

sen b = DG/1 → DG = sen b

No triângulo OBG, temos:

cos a = OB/OG → OB = cos a . OG = cos a . cos b.

Note que, AĤO = 90° − a = CĤG. Dessa forma: HD̂G = a

Assim, no triângulo CDG teremos:

sen a = CG/DG → CG = sen a . DG = sen a . sen b

Mas CG = AB, então AB = sen a . sen b

Já sabemos que cos(a+b) = OB − OA. Substituindo os valores de OB e OA, teremos:

cos(a – b) = cos a . cos b + sen a .sen b

Assim, acabamos de demonstrar a fórmula da adição para o cosseno. Para a subtração, basta trocar na fórmula o b por −b.

cos(a+(−b)) = cosa . cos(−b) − sena . sen(−b)

Da redução de arcos, sabemos que cos(−b) = cos b e sen(−b) = −sen b

Substituindo, teremos:

cos(a – b) = cos a . cos b − sen a . (–sen b)

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: *Calcule o valor de cos15°*

Resolução: *cos15° = cos(45°–30°) = cos45° . cos30° + sen45° . sen30°*

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

11.2) Seno

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$

Demonstração:

No estudo do triângulo retângulo, foi demonstrado que sen α = cos(90° − α).

Então sen(a + b) = cos(90° – (a + b)) = cos(90° – a – b)) = cos((90° − a) + (–b))

Mas, da fórmula de adição para o cosseno, temos:

cos((90°–a)+(–b)) = cos(90°–a) . cos(–b)– sen(90° – a) . sen(–b)

Da redução de arcos, temos que cos(–b) = cos b e sen(–b) = – sen b

Substituindo, teremos:

sen(a + b) = sen a . cos b – cos a . (–sen b)

Onde sen(a+b) = sen a . cos b + sen b . cos a

Como queríamos demonstrar.

E de forma análoga como foi feita na fórmula da diferença para cosseno, encontra-se a fórmula da diferença para o seno, substituindo o b por –b.

sen(a–b) = sen a . cos b − sen b . cos a

Exemplo: *Calcule o valor de sen 15°*

Resolução: *sen15° = sen(45°–30°) = sen45° . cos30° – sen30° . cos45°*

$$sen\ 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

11.3) Tangente

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Faremos a demonstração da soma. A demonstração da diferença fica como exercício. Pode-se demonstrar o caso da diferença de maneira análoga como foi feita para o cosseno e seno.

Demonstração:

Sabemos que:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a + b)}$$

Substituindo as fórmulas de adição, temos:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b}$$

Dividindo numerador e denominador do 2º membro por cosa . cosb, teremos:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen } a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \dfrac{\text{sen } b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \dfrac{\text{sen } b \cdot \text{sen } a}{\cos a \cdot \cos b}}$$

Onde

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: *Calcule o valor de tg15°*

Resolução:

$$tg15° = tg(60° - 45°) = \frac{tg\ 60° - tg\ 45°}{1 + tg\ 60° \cdot tg\ 45°}$$

$$tg\ 15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1}$$

Racionalizando o denominador, obtemos:

tg15° = 2 – $\sqrt{3}$

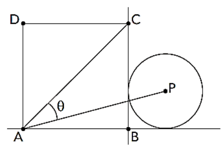
PRATICANDO

19) Calcule o valor de sen 75°

20) Huguinho joga um pião que cai sobre uma circunferência trigonométrica exatamente em cima do ponto P = (1,0). Em seguida o pião desliza sobre a circunferência no sentido horário percorrendo um arco de 1245° parando sobre um ponto Q. Determine a abscissa do ponto Q.

a) $(-\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$
b) $(-\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$
c) $(-\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
d) $(-\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$
e) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$

21) (UERJ) No esquema abaixo, estão representados um quadrado ABCD e um círculo de centro P e raio r, tangente às retas AB e BC. O lado do quadrado mede 3r.



A medida θ do ângulo CÂP pode ser determinada a partir da seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}(\alpha) - \text{tg}(\beta)}{1 + \text{tg}(\alpha) \times \text{tg}(\beta)}$$

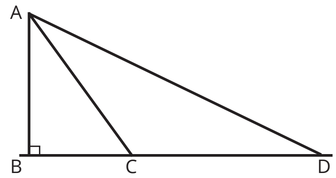
O valor da tangente de θ é igual a:
a) 0,65
b) 0,60
c) 0,55
d) 0,50

Como holofote ou farol pode cair no ENEM?

MAT0097

O movimento das luzes de um farol ou um holofote pode formar, simplificadamente, a figura de um triângulo. Entretanto, esse triângulo pode não ser retângulo, o que torna a questão mais desafiadora. Portanto, é importante saber os métodos de determinação de seno, cosseno, tangente etc. dos diversos grupos de ângulos notáveis, seja pela soma / subtração de arcos, seja pela utilização do círculo trigonométrico.

(UERJ) Um holofote está situado no ponto A, a 30 metros de altura, no alto de uma torre perpendicular ao plano do chão. Ele ilumina, em movimento de "vaivém", uma parte desse chão, do ponto C ao ponto D, alinhados à base B, conforme demonstra a figura a seguir:



Se o ponto B dista 20 metros de C e 150 metros de D, a medida do ângulo CÂD corresponde a:
a) 75°
b) 60°
c) 45°
d) 30°
e) 15°

Gabarito: C

Como pode cair no ENEM?

12) Arco duplo

12.1) Cosseno do dobro de um arco

Considere um arco **a** qualquer. As três maneiras mais usuais de se escrever o cosseno do dobro de um arco são:

$\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

$\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1$

$\cos(2a) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$

Demonstrações

Sabemos que cos(a+b) = cos a . cos b – sen a . sen b.

Trocando **b** por **a**, teremos:

cos(a+a) = cos a . cosa − sen a . sen a

Onde:

$\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$ (I)

Como queríamos demonstrar.

Sabemos que $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \rightarrow \text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$ (II)

Substituindo (II) em (I), teremos:

$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

Onde:
$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$
Como queríamos demonstrar.

Procedendo de maneira análoga, prova-se também que $\cos(2a) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2\, a$

Exemplo: *Admitindo que cos84°=0,1 determine o valor de cos168°.*

Resolução:

Sabemos que $\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1$

Como $\cos 84° = 0{,}1$*, substituindo teremos:*

$\cos 168° = 2 \cdot \cos^2 84° - 1$

$\cos 168° = 2 \cdot (0{,}1)^2 - 1$

$\cos 168° = 2 \cdot 0{,}01 - 1$

$\cos 168° = -0{,}98$

12.2) Seno do dobro de um arco

Considere um arco a qualquer. Então:

$$\text{sen}(\mathbf{2a}) = 2 \cdot \text{sen}\, \mathbf{a} \cdot \cos \mathbf{a}$$

Demonstração

Da adição de arcos, sabemos que $\text{sen}(a + b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a$

Substituindo b por a, teremos

$\text{sen}(a + a) = \text{sen} a \cdot \cos a + \text{sen}\, a \cdot \cos a$

Onde $\text{sen}(2a) = 2\, \text{sen}\, a \cdot \cos a$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: *Sabendo que* $\text{sen}\, a = 3/5$ *e* $0 < x < \pi/2$*, calcule o valor de sen(2x).*

Resolução:

A fórmula de arco duplo para seno é $\text{sen}(2a) = 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \cos a$

Note que, para calcular o sen(2x), precisamos dos valores de sen x e cos x. Já temos o valor de sen x. Vamos procurar o valor do cos x.

Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$*. Substituindo o valor do seno, e analisando o quadrante fornecido, encontraremos* $\cos x = 4/5$*.*

Substituindo na fórmula do arco duplo teremos:

$\text{sen}(2x) = 2x \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$

$\text{sen}(2x) = 2 \cdot 3/5 \cdot 4/5$

$\text{sen}(2x) = 24/25$

12.3) Tangente do dobro de um arco

Considere um arco a qualquer. Então

$$\text{tg}(2a) = \frac{2 \cdot \text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2\, a}$$

Desde que todas as condições de existência sejam respeitadas.

Pode-se demonstrar essa fórmula da adição de arcos de modo inteiramente análogo como foi feito para o cosseno e seno. Deixaremos como exercício.

Exemplo: *Considere um arco x tal que tg(2x) = 3. Calcule o valor de tg(4x)*

Resolução:

Como $4x = 2 \cdot 2x$

$\text{tg}(4x) = 2 \cdot \text{tg}(2x)/[1 - \text{tg}^2(2x)]$

$\text{tg}(4x) = 2 \cdot 3/1 - 3^2$

$\text{tg}(4x) = 6/-8$

$\text{tg}(4x) = -3/4$

PRATICANDO

22) Utilizando a aproximação $\cos 53° \cong 0{,}6$, teremos que o valor de cos 106° é aproximadamente:

a) −0,28
b) −0,26
c) −0,24
d) −0,22
e) −0,20

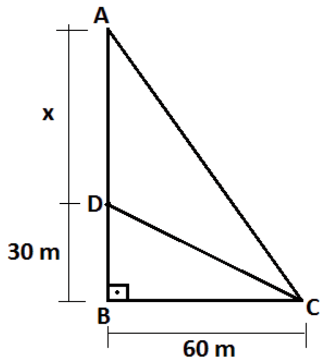
23) (PUC) Sabendo que $\pi < x < 3\pi/2$ e $\text{sen}(x) = -1/3$, é correto afirmar que sen (2x) é:

a) −2/3
b) −1/6
c) $\sqrt{3}/8$
d) 1/27
e) $\sqrt{2}/9$

24) Sabendo que $\text{sen}\, x - \cos x = 2/3$, pode-se firmar que o valor de sen (2x) é:

a) 8/9
b) 7/9
c) 6/9
d) 5/9
e) 4/9

25) (UFG) Um time de futebol conseguiu um terreno para construir um centro de treinamento. O terreno tem a forma de um triângulo e suas dimensões são apresentadas na figura a seguir. O terreno está todo murado, exceto a parte relativa ao segmento AD, cuja medida x é desconhecida.



Sabendo que no triângulo ABC, CD é bissetriz interna do ângulo com vértice em C, pode-se afirmar que a medida x, do muro AD, é:
a) 70 m
b) 60 m
c) 50 m
d) 40 m
e) 30 m

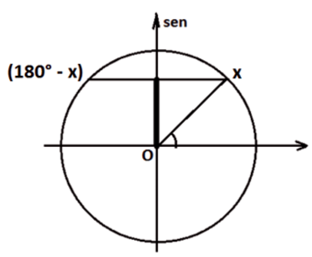
13) Equações trigonométricas

São equações que envolvem as razões trigonométricas.

Resolveremos as equações com base na redução ao primeiro quadrante.

13.1) Equações redutíveis a forma sen x = sen y

Note os arcos x e 180° – x possuem o mesmo valor de seno



Dessa forma, as soluções da equação sen x = sen y são:

$x = y + k \cdot 360°$ ou $x = 180° - y + k \cdot 360°$, com $k \in Z$

Exemplo: *Resolva a equação sen x = 1/2*

Resolução:

Sabemos que sen 30° = 1/2

Então essa equação pode ser escrita como:

sen x = sen 30°

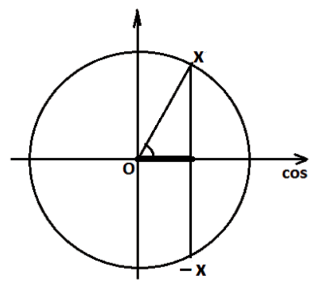
E como foi visto, teremos:

$x = 30° + k \cdot 360°$ ou $x = 180° - 30° + k \cdot 360°$, com k inteiro.

$S = \{x \in R / x = 30° + k \cdot 360°$ ou $150° + k \cdot 360°, k \in Z\}$

13.2) Equações redutíveis a forma cos x = cos y

Note os arcos x e –x possuem o mesmo valor de cosseno.



Dessa forma, as soluções da equação cos x = cos y são:

$x = y + k \cdot 360°$ ou $x = -y + k \cdot 360°$, com $k \in Z$

Que pode ser escrita de forma única como

$x = \pm y + k \cdot 360°$, com $k \in Z$

Exemplo: *Resolva a equação cos x = 1/2*

Resolução:

Sabemos que cos 60° = 1/2

Então essa equação pode ser escrita como cos x = cos 60°

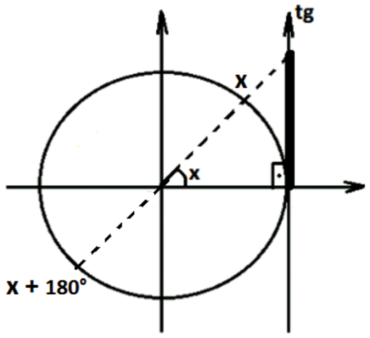
E como foi visto, teremos

$x = \pm 60° + k \cdot 360°$, com k inteiro.

$S = \{x \in R / x = \pm 60° + k \cdot 360°, k \in Z\}$

13.3) Equações redutíveis a forma tg x = tg y

Note os arcos x e x + 180° possuem o mesmo valor de tangente.



Dessa forma, as soluções da equação tg x = tg y são:

x = y + k . 360° ou x = y + 180° + k . 360°, com k ∈ Z.

Que pode ser escrita de forma única como x = y + k . 180°, com x ∈ Z

Exemplo: *Resolva a equação tg x = 1*

Resolução:

Sabemos que tg 45° = 1

Então essa equação pode ser escrita como:

tg x = tg 45°

E como foi visto, teremos:

x = 45° + k . 180°, com k ∈ Z.

S = {x ∈ R/x = 45° + k . 180°, k ∈ Z }

PRATICANDO

26) Resolva as equações trigonométricas em R.

a) sen x = −1/2 ; x ∈ [0,2π]

b) tg x =−1; x ∈ [π, 2π]

c) 2 cos x − $\sqrt{3}$ = 0

d) $\cos^2 x = 2 - \cos x$

e) 2 = $\sqrt{2}$/sen(3x)

27) (FGV-SP) No intervalo [0, π], a equação $8^{\text{sen}^2 x} = 4^{\text{sen}\, x - 1/8}$ admite o seguinte número de raízes:

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

14) Inequações trigonométricas

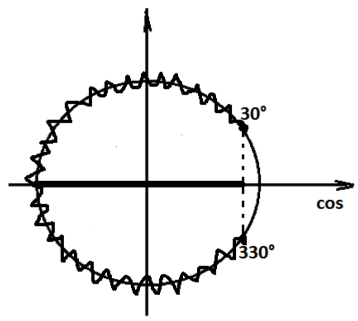
São inequações que envolvem as razões trigonométricas. Suas resoluções são baseadas nas resoluções das equações, mas tomando o cuidado, pois agora as soluções serão na maioria das vezes intervalos reais.

Exemplo: *Resolva a inequação cos x ≤ $\sqrt{3}/2$ com x ∈ [0,2π]*

Resolução:

Note que, na primeira volta, cos x = $\sqrt{3}/2$ quando x = 30° ou quando x = 330°

Mas queremos os valores dos arcos que tornam cos x ≤ $\sqrt{3}/2$



Com base na circunferência trigonométrica, teremos:

S = {x ∈ R/30° ≤ x ≤ 330°}

Que é equivalente a escrever S = {x ∈ R/π/6 ≤ x ≤ 5π/6}

Note que essa solução também pode ser escrita na forma de intervalo S = [π/6, 5π/6]

15) Funções trigonométricas

São as funções que envolvem as razões trigonométricas

15.1) Função seno

É a função f: R → R, tal que f(x) = sen x

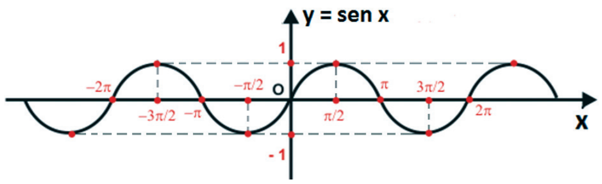
Note que, x pode assumir qualquer valor real. Dessa forma o domínio da função seno é R.

Lembremos também que, os valores do seno variam de −1 a 1. Dessa forma a imagem da função seno será o intervalo [−1, 1]

Assim, podemos escrever D(f) = R

Im(f) = [−1, 1]

A figura a seguir mostra o gráfico da função seno.



Observação

Note que os valores de y se repetem a cada intervalo de 2π radianos. Nesse caso dizemos que a função seno é periódica, e seu período é 2π.

15.2) Função cosseno

É a função f: R $\rightarrow$ R, tal que f(x) = cos x

Note que, x pode assumir qualquer valor real. Dessa forma o domínio da função cosseno é R.

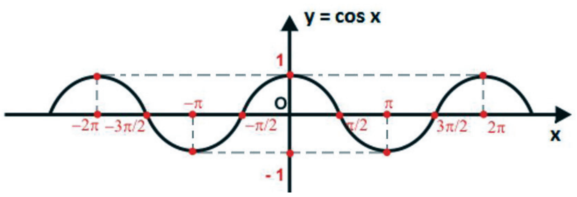
Assim como na função seno, os valores do cosseno variam de −1 a 1. Dessa forma a imagem da função cosseno será o intervalo [−1,1]

Assim, podemos escrever:

D(f) = R

Im(f) = [−1,1]

A figura a seguir mostra o gráfico da função cosseno.



Observação

Como foi comentado na observação anterior, assim como a função seno, a função cosseno também é periódica, e seu período também é 2π.

15.3) Função tangente

É a função f:{x $\in$ R; x ≠ $\pi/2 + k\pi$, k $\in$ Z} $\rightarrow$ R, tal que f(x) = tg x

Note que, a função tangente só está definida para valores de x tais que x ≠ $\pi/2 + k\pi$, k $\in$ Z.

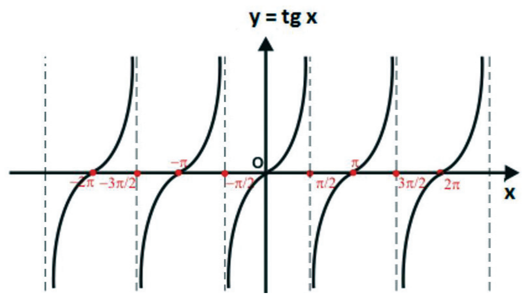
Já os valores de tg x, podem assumir qualquer valor real.

Assim, podemos escrever:

D(f) = {x $\in$ R ; x ≠ $\pi/2 + k\pi$, k $\in$ Z}

Im(f) = R

A figura a seguir mostra o gráfico da função tangente.



Observação

Note que os valores da tangente se repetem a cada intervalo de π radianos. Dessa forma, dizemos que a função tangente é periódica, e seu período é π.

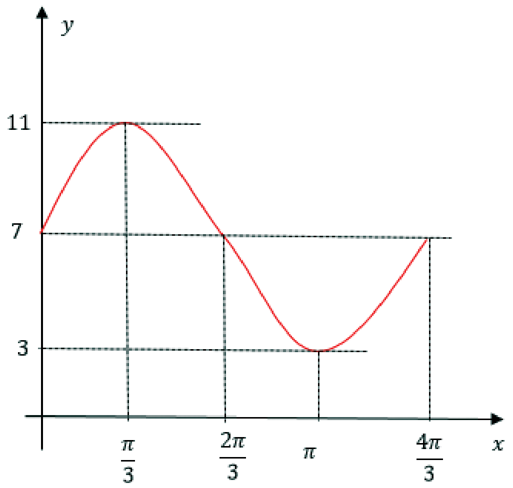
– Uma função do tipo y = sen(cx) terá período p = $2\pi/c$

– Note que a função y = sen(cx) sobe até 1 e desce até −1. Multiplicando essa função por um número positivo b, a função y = b . sen(cx) passará a subir até b, e descerá até −b.

– Caso a função y = b . sen(cx) seja adicionada de um número a, a função y = a + b . sen (cx) indicará que o gráfico da função y = b + sem (cx) subirá a unidades quando a for positivo, e descerá a unidades quando a for negativo.

– Com a função cosseno tudo isso ocorre da mesma forma.

Exemplo: *O gráfico a seguir mostra a posição y em função do tempo x de uma partícula em movimento harmônico descrito por uma senóide do tipo y = a + b sen(cx). Determine os valores de a, b e c.*



Resolução:

Como se trata de uma função seno, e o "eixo" do seu gráfico subiu 7 unidades, podemos afirmar que a = 7.

Além disso, a partir do 7, o gráfico sobe e desce 4 unidades. Dessa forma b = 4.

Note que, o gráfico nos mostra que o período da função é 4π/3. Como o período da função é obtido através da fórmula 2π/c, basta igualar essas frações 2π/c = 4π/3, daí:

$4\pi c = 6\pi$

$c = \dfrac{3}{2}$

PRATICANDO

28) Considere a função f: R → R, tal que f(x) = –2 + 20 . sen x. Determine o valor de f(π/6).

29) (IFPE) Na cidade de Recife, mesmo que muito discretamente, devido à pequena latitude em que nos encontramos, percebemos que, no verão, o dia se estende um pouco mais em relação à noite e, no inverno, esse fenômeno se inverte. Já em outros lugares do nosso planeta, devido a grandes latitudes, essa variação se dá de forma muito mais acentuada. É o caso de Ancara, na Turquia, onde a duração de luz solar L, em horas, no dia d do ano, após 21 de março, é dada pela função:

$$L(d) = 12 + 2{,}8 \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(d - 80)\right]$$

Determine, em horas, respectivamente, a máxima e a mínima duração de luz solar durante um dia em Ancara.

a) 12,8 e 12
b) 14,8 e 9,2
c) 12,8 e 9,2
d) 12 e 12
e) 14,8 e 12

30) (ENEM) *Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.*

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função.

$$P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

Onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

(Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 [adaptado])

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

a) janeiro;
b) abril;
c) junho;
d) julho;
e) outubro.

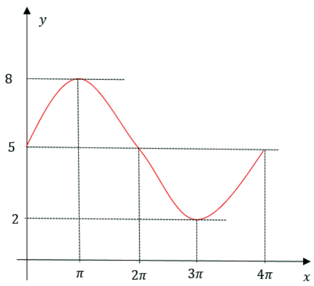
31) Em meio a uma ventania, durante 2π segundos o voo de um objeto foi captado por um programa de computador, que estipulou a altura h desse objeto, em metros, em função do tempo t, em segundos, durante sua trajetória. A função encontrada foi

$$h(t) = 10 + 6 \cdot \text{sen}(t)$$

Com base nisso, durante o período de observação, determine o intervalo de tempo, em segundos, em que o objeto atingiu altura superior a 13 metros?

a) $\pi/2 < t < 3\pi/2$
b) $\pi/3 < t < 2\pi/3$
c) $\pi/4 < t < 3\pi/4$
d) $\pi/5 < t < 3\pi/5$
e) $\pi/6 < t < 5\pi/6$

32) O gráfico a seguir mostra a posição y em função do tempo x de uma partícula em movimento harmônico descrito por uma senoide do tipo y = a + b sen (cx).



Dessa forma, pode-se afirmar que:
a) a = 8, b = 2 e c = 4
b) a = 8, b = 5 e c = 2
c) a = 5, b = 3 e c = 1/2
d) a = 5, b = 2 e c = 8
e) a = 1/2, b = 3 e c = 4

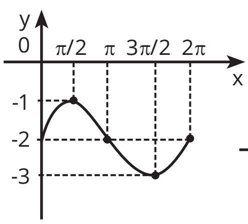
Como deslocamentos de gráficos pode cair no ENEM?

MAT0098

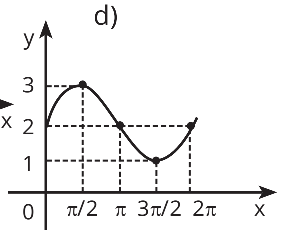
As principais funções trigonométricas possuem sua representação gráfica formada por curvas periódicas, ou seja, que se repetem ao longo do seu domínio. Mas quando aplicadas a um contexto mais concreto, as equações são modificadas para adequar-se ao problema. Essa mudança, então, gera uma alteração também na curva que é representada no plano cartesiano, que pode ser um alargamento / achatamento (tanto em x quanto em y), ou também o deslocamento do gráfico, e é saber identificar o efeito apenas observando a lei de formação.

Assinale o gráfico que representa a função real definida por y = 2 – sen x.

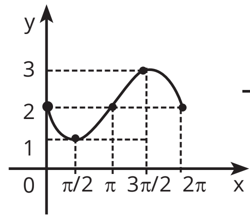
a)



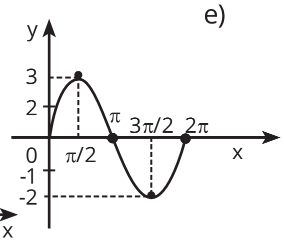
d)



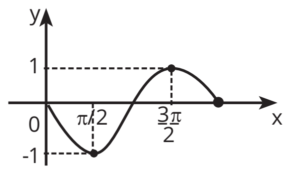
b)



e)



c)



Gabarito: E

Como pode cair no ENEM?

4NEWS

Limite extremo

O que passa na cabeça de uma pessoa para se jogar de um prédio?

O que passa na cabeça das pessoas que se jogam do alto de prédios é algo bem complexo, mas consiste, na maioria dos casos, delas estarem, ou melhor dizendo, pensarem que estão sem opção. Com certeza já veio em sua cabeça o exemplo do suicídio, mas um prédio em chamas também é muito comum essa atitude desesperadora, buscando sair daquele estado de angústia. Para saber mais sobre esse assunto, siga-me até o portal *www.4newsmagazine.com.br.*

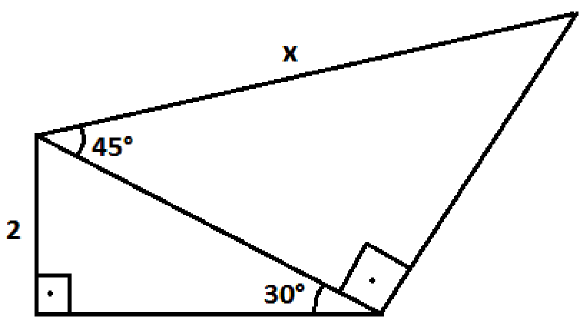
#Extremo #SempreHáOpções #Raciocine

APROFUNDANDO

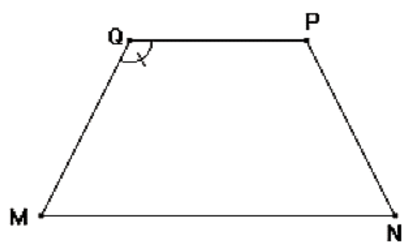
33) Uma escada de 3 metros de comprimento está apoiada no topo de um muro. Sabendo que a escada forma com a horizontal um ângulo de 60°, determine a distância da base da escada até o muro.

a) 1 m
b) 1,5 m
c) 2 m
d) 2,5 m
e) 3 m

34) Calcule o valor de x na figura.



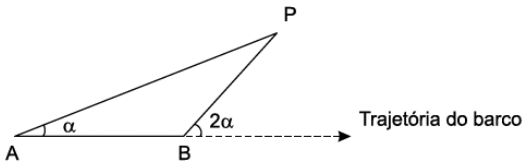
35) Na figura, MNPQ é um trapézio isósceles, MN = 20cm, PQ = 10cm e o ângulo MQP = 120°.



Determine o perímetro desse trapézio.

a) 45 cm
b) 50 cm
c) 55 cm
d) 60 cm
e) 65 cm

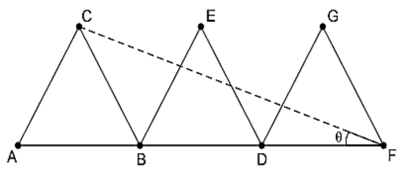
36) (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A figura ilustra essa situação:



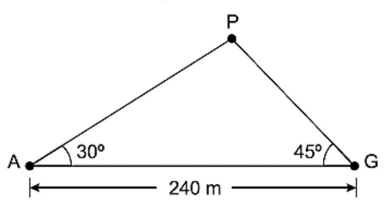
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30° e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2000m . Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1000 m
b) $1000\sqrt{3}$ m
c) $2000\sqrt{3}/3$
d) 2000 m
e) $2000\sqrt{3}$ m

37) (CFTRJ) Três triângulos equiláteros de lado 1 cm estão enfileirados, como indicado na figura abaixo. Nessas condições, determine o seno do ângulo θ .



38) (PUC) Abílio (A) e Gioconda (G) estão sobre uma superfície plana de uma mesma praia e, num dado instante, veem sob respectivos ângulos de 30° e 45°, um pássaro (P) voando, conforme é representado na planificação a seguir.



Considerando desprezíveis as medidas das alturas de Abílio e Gioconda e sabendo que, naquele instante, a distância entre A e G era de 240 m, então a quantos metros de altura o pássaro distava da superfície da praia?

a) $60(\sqrt{3} + 1)$
b) $120(\sqrt{3} - 1)$
c) $120(\sqrt{3} + 1)$
d) $180(\sqrt{3} - 1)$
e) $180(\sqrt{3} + 1)$

39) Dona Florinda fixa um fio com uma extremidade no chão e a outra no topo de um muro de modo que a extremidade do chão está a 5 metros do muro e o ângulo agudo que o fio faz com o chão é de 65°. Determine o comprimento desse fio supondo sen 65° = 0,90, cos 65° = 0,40 e tg 65° = 2,25.

a) 8,5 cm
b) 9,5 cm
c) 10,5 cm
d) 11,5 cm
e) 12,5 cm

40) Com relação ao arco de 1900°, determine a sua primeira determinação positiva, em qual quadrante se encontra a sua extremidade, quantas voltas foram dadas até alcançar essa extremidade e a expressão geral dos arcos côngruos a 1900°.

41) Calcule o valor da soma:

$\text{sen}\,\pi + \cos 3\pi/2 + \cos \pi + \cos 2\pi$

42) Escreva os valores de:

a) sen ($\pi/6$)
b) cos ($\pi/6$)
c) tg ($\pi/6$)
d) cotg ($\pi/6$)
e) sec ($\pi/6$)
f) cossec ($\pi/6$)

43) Sabendo que sen x = 3/4 e que $\pi/2 < x < \pi$, o valor de cos x é:

a) $-\sqrt{7}/4$
b) $\sqrt{7}/4$
c) $\sqrt{3}/5$
d) 3/5
e) –3/5

44) Sabendo que cossec α = 2, sendo α um arco do 1º quadrante, pode-se afirmar que tg α é:

a) $\sqrt{3}/2'$
b) $\sqrt{3}/3$
c) $\sqrt{2}/2$
d) $\sqrt{3}$
e) 1

45) Simplifique $\dfrac{\cos^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x - 1}$:
a) 1
b) –1
c) 2
d) –2
e) 3

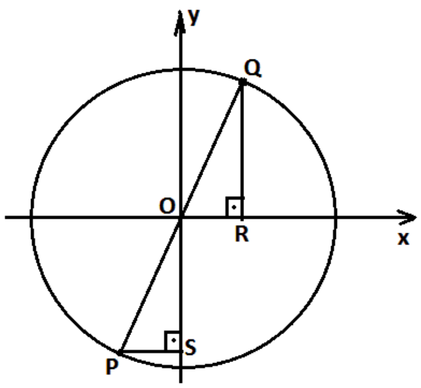
46) Ao simplificar a expressão:

$$\frac{\sec^2 x - \text{sen}^2 x \,.\, \sec^2 x}{\text{cossec}\, x}$$

Obtém-se:
a) sen x
b) cos x
c) tg x
d) cotg x
e) sec x

47) Dê o valor de:
a) tg315°
b) cos840°
c) $\cos(43\pi/6)$
d) $\text{sen}(-111\pi)$

48) Na figura a seguir P e Q são pontos sobre uma circunferência trigonométrica de centro O, e os pontos P, O e Q são colineares.



Sabendo que PÔS = 30°, o valor do produto $\overline{PS}\ .\ \overline{QR}$ é:
a) $\sqrt{2}/2$
b) 1/2
c) $\sqrt{3}/2$
d) 1/4
e) $\sqrt{3}/4$

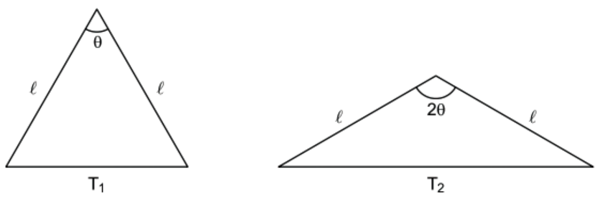
49) Dê o valor de:
a) sen 75°
b) cos 105°
c) sen 15°
d) tg $\pi/12$

50) (EAESP-FGV) Se $\alpha + \beta = \pi/4$, então $(1 + \text{tg}\ \alpha)(1 + \text{tg}\ \beta)$ é igual a:
a) 1
b) 2
c) 2tg α
d) 2tg β
e) tgα . tgβ

51) Suponha que cos25° = 0,9 , calcule o valor de cos 50°.
a) 0,18
b) 0,36
c) 0,48
d) 0,62
e) 0,81

52) Rafael possui uma tabela trigonométrica que fornece os valores de seno, cosseno e tangente apenas para ângulos até 90°. Para um trabalho da escola ele precisa saber o valor da tangente de 128°. Como ele é muito bom em matemática, especialmente em trigonometria, ele consulta a tabela e vê que tg64°$\cong$ 2. A partir daí, com alguns cálculos Rafael encontra uma boa aproximação para a tangente de 128°. Usando a aproximação da tabela do Rafael, encontra-se tg128° aproximadamente igual a:
a) –4/3
b) 4/3
c) –4
d) 4
e) –2/3

53) (INSPER) Movendo as hastes de um compasso, ambas de comprimento ℓ1, é possível determinar diferentes triângulos, como os dois representados a seguir, fora de escala.



Se a área do triângulo T1 é o triplo da área do triângulo T2, então o valor de cosθ é igual a:

a) 1/6
b) 1/3
c) $\sqrt{3}/3$
d) 1/2
e) $\sqrt{6}/6$

54) Resolva as equações trigonométricas em R.

a) tg x =–1 ; x ∈ [0,2π]
b) cos x = 1/2 ; x ∈ [π,2π]
c) 2sen x + 1 = 0
d) 2sen² x = 5 sen x –2
e) 1 = $\sqrt{3}$/tg(2x)

55) Determine todos valores de x, x ∈[0,2π], tais que 2cos x – 1 < 0.

56) Considere a função f: R → R, tal que f(x) = 6 + 2 . cos x.

a) Determine o valo de f(π/2);
b) Determine o valor máximo de f;
c) Determine o valor mínimo de f.

57) Uma abelha voa num percurso de modo que sua altura em relação ao solo, em função do tempo é dada pela função h(t) = 5 + sen (πt/4), 0 ≤ t ≤ 40, com h em centímetros e t em segundos. Após 40 segundos de percurso, ela fica imóvel no ar apenas observando um pote de mel. Com relação a esse percurso:

a) Qual é a altura da abelha no momento em que ela está imóvel no ar observando o pote de mel?
b) Quanto tempo ela leva para atingir pela primeira vez o ponto mais alto dessa trajetória?

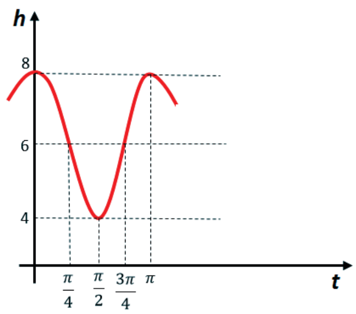
58) Em uma fazenda, certo tipo de plantação é abundante em determinadas épocas do ano e escassa em outras. A área S, em metro quadrado, ocupada por essa plantação na fazenda, ao longo do ano, pode ser expressa por meio da função:

S(t) = 200 + 40 cos (πt/6)

em que t = 1, t = 2, t = 3, ..., t = 12, representam o final dos meses de janeiro, fevereiro, março, ...e dezembro, respectivamente.

a) Qual é a área ocupada por essa plantação na fazenda ao final do mês de dezembro?
b) Ao longo do ano, qual é a menor área ocupada por essa plantação na fazenda?
c) Em que meses do ano, a área ocupada por essa plantação é de 220 m²?

59) O voo de uma borboleta é registrado durante um curto intervalo de tempo. Sua altura h, em metros, em função do tempo t, em segundos, pode ser modelada através de uma função do tipo h(t) = a + b . cos(ct) cujo gráfico é apresentado a seguir.



Dessa forma, pode-se afirmar que:

a) a =8, b = 6 e c = 4
b) a =4, b = 8 e c = 6
c) a =4, b = 3 e c = 2
d) a =6, b = 2 e c = 2
e) a =6, b = 2 e c = 3

DESAFIANDO

60) Considere as funções f: R $\rightarrow$ R, tal que $f(x) = x^2$ e g: R$\rightarrow$R, tal que g(x) = cos x.

Seja m o número de soluções da equação f(x) – g(x) = 0, no intervalo [$-\pi$, 0] e seja n o número de soluções da equação g(x) – f(x) = 0 no intervalo [2π, 3π].

Dessa forma, podemos afirmar que m + n é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

61) (UNIFESP) A função:

$$D(t) = 12 + (1,6) \cos [\pi/180) t + 10]$$

Fornece uma aproximação da duração do dia (diferença em horas entre o horário do pôr do sol e o horário do nascer do sol) numa cidade do Sul do país, no dia t de 2010. A variável inteira t, que representa o dia, varia de 1 a 365, sendo t = 1 correspondente ao dia 1º de janeiro e t = 365 correspondente ao dia 31 de dezembro. O argumento da função cosseno é medido em radianos. Com base nessa função, determine:

a) a duração do dia 19/02/2010, expressando o resultado em horas e minutos.
b) em quantos dias no ano de 2010 a duração do dia naquela cidade foi menor ou igual a doze horas.

RESUMINDO

- Seno $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$;
- Cosseno $= \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$;
- Tangente $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$;
- Sempre que tivermos dois ângulos α e β complementares, isto é, $\alpha + \beta = 90°$, teremos:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta \qquad \text{e} \qquad \text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta}.$$

- Tabela trigonométrica para os ângulos notáveis:

	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ORIENTADOR METODOLÓGICO

Organizando números e dados em matrizes

Conteúdo:

- Introdução a matrizes;
- Operações;
- Problemas;
- Matriz Identidade;
- Matriz Inversa;
- Determinantes de ordem 2 e 3.

Objetivos de aprendizagem:

- Compreender o significado de uma matriz;
- Assimilar as diversas propriedades associadas às matrizes;
- Realizar operações envolvendo matrizes;
- Calcular determinantes de matrizes quadradas;
- Utilizar conceitos de matrizes para determinar conjuntos-solução de sistemas lineares.

Praticando:

1) a) $7 + 0 + (-3) = 4$
   b) $3 + 6 + 7 = 16$

2) a) 40,5 é a maior temperatura. Ele é o elemento A_{24}, portanto, instante 2 do dia 4.
   b) $\frac{38,6+37,2+36,1}{3} = 37,3$

3)
$$\begin{matrix} 0 & -6 & 5 \\ .x & 3 & 1 \\ 4 & 8 & z \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & -6 & 5 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 \\ 4 & y & 2 \end{matrix}$$ => Logo, $x = \sqrt{2}$, y = 8 e z = 2

4) A matriz AB é dada por:

$A11 = 12 - 1 + 3 = 14$ $A21 = 0 + 7 + 1 = 8$ $A31 = 3 - 1 + 2 = 4$
$A12 = -4 - 2 - 3 = -9$ $A22 = 0 + 14 - 1 = 13$ $A32 = -1 - 2 - 2 = -5$
$A13 = 24 - 5 + 6 = 25$ $A23 = 0 + 35 + 2 = 37$ $A33 = 6 - 5 + 4 = 5$

Logo, a matriz é: $\begin{matrix} 14 & 8 & 4 \\ -9 & 13 & -5 \\ 25 & 37 & 5 \end{matrix}$

5) Quando multiplicamos uma matriz 7x5 por uma 5x7, o produto existe pois o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda e a matriz produto será 7x7, ou seja, 49 elementos. Gabarito A.

6) Sabemos que trabalho é dado pelo produto da força pelo deslocamento. Do setor 1 para o setor 2, o trabalho foi de 40 J, do setor 2 ao 3 foi de 80 J e do setor 3 ao 1, de 60 J. Sabendo que a força é de 4 N, constante, no primeiro trajeto ele andou 10 metros, no segundo 20 metros e no terceiro 15 metros, assim, ele andou 45 metros, C.

7) Fazendo a multiplicação CA, teremos:

CA = (20 7 14 1 8) = RAMON

Opção E

8) Uma matriz é inversa de outra se o seu produto for igual a identidade, assim:

$$\cdot\begin{bmatrix} 3 & y \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A12 = 0 = $-3 + 3y => y = 1$

A21 = 0 = $10 + 2x => x = -5$

9) $$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A11 = 4 = $2 + a => a = 2$

A21 = 2 = $2b + 2 => b = 0$

O produto é zero.

Opção C

10) Pela propriedade dos determinantes, det(AB) = det(A) . det(B), então:

6x = 15 => x = $\frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 0{,}5$.

11) $$\left|\begin{matrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & x \\ -2 & x \\ 1 & -3 \end{matrix} => -x^2 - 4x + 12 - 2x - 12 - 2x^2 = 0$$

$$.-3x^2 - 6x = 0 => 3x(-x-2) = 0 => x' = 0 \; ou \; x'' = -2$$

12) $$\begin{vmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{vmatrix} = e^{a+d} - e^{c+b}$$

Pela PA, temos:

b = a + r

c = a + 2r

d = a + 3r

Logo, $e^{a+a+3r} - e^{a+2r+a+r} = e^{2a+3r} - e^{2a+3r} = 0$

13) $$\begin{cases} 2x + y = 10{,}6 \\ x + y = 6{,}4 \end{cases} => x = 4{,}2 \; e \; y = 2{,}2$$

14) $\begin{cases} 2x + 9y = 451 \\ x + 4y = 207 \end{cases} => \begin{cases} 2x + 9y = 451 \\ -2x - 8y = -414 \end{cases} => y = 37 \; e \; x = 59$

Sabendo que João comprou 3 calças e 9 camisas, teremos 3 . 59 + 9 . 37 = 177 + 333 = 510, logo, ele pagou mais do que 500.

15) $\begin{cases} b + r + s = 7 \\ 2b + r + 2s = 12 \\ 3b + 5r + s = 17 \end{cases} => \begin{cases} b + r + s = 7 \\ b + \frac{r}{2} + s = 6 \end{cases} => \frac{r}{2} = 1 => r = 2$

.$\begin{cases} b + s = 5 \\ 3b + s = 7 \end{cases} => 2b = 2 => b = 1 \; e \; s = 4$

Bom-bom é 1 real, refrigerante é 2 reais e sorvete é 4 reais.

16) Percebemos que a soma de todas as linhas é 15, pois a soma da diagonal é 15. Assim, teremos:

.$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 7y = 10 \end{cases} => \begin{cases} 3x + y = 10 \\ -3x - 21y = -30 \end{cases} => -20y = -20 => y = 1 \; e \; x = 3$

.$z + 3x + 4 = 15 => z + 9 + 4 = 15 => z = 2$

17) O sistema será possível e indeterminado se as equações forem múltiplas, ou seja:

.$\frac{a}{1} = \frac{4}{a} = \frac{a^2}{-2}$

1º: $\frac{a}{1} = \frac{4}{a} => a^2 = 4 => a = \pm 2$

2º: $\frac{a}{1} = \frac{a^2}{-2} => -2a = a^2 => a = -2$

Logo, vimos que a = -2.

18) Numa matriz com 5 linhas, os elementos internos não poderão estar nem na primeira e nem na 5ª linhas, assim, sobram 3 linhas. Observando o número de colunas, o elemento não poderá estar nem na primeira e nem na 6ª linhas, assim, sobram 4 colunas, logo, 3 x 4 = 12 elementos.

19) Rodrigo: 1
Otávio: 2
Ronaldo: 3

Queremos saber quantos 2 ficou devendo para 1. Olhando para a tabela S, vimos que:
1º pagou 2 temakis para 2º e que o 2º pagou 1 temaki para o 1º

Olhando a tabela D, vimos que:
1º pagou 3 tamkis para o 2º e que o 2º não pagou nenhum temaki para o 1º.

Assim, o 1º pagou 5 e o 2º pagou 1, logo, deve 4 temakis.

Opção E

20) a) cada coluna representa quantos votos cada um recebeu, assim, a coluna 5 possui mais votos, logo o senador 5 ganhou mais votos.
b) Os elementos da diagonal principal representa todos os candidatos que votaram em si mesmos, assim, apenas dois senadores votarem em si, o senador 1 e o senador 5.

21) a) Os assinantes da revista 2 vão trocar suas assinaturas pela revista 1 ou pela revista 3, assim, teremos: $0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 = 30\%$
b) Os leitores mais satisfeitos são aqueles que possuem maior probabilidade de não trocar de revista, ou seja, entre os elementos da diagonal principal, aquele que apresentar maior probabilidade é o mais satisfeito e o que possuir menor probabilidade é o menos satisfeito, logo, o leitor da revista 3 possui 0,4 de chance de não trocar, logo é o menos satisfeito.

22) linha -> andar
Coluna -> apartamento
Como o número de moradores do 1º andar excede em 3 o número de moradores do 2º andar, temos:
$.4 + x + 5 = 1 + 3 + y + 3 => x - y = -2$

Como os apartamentos de número 3 comportam 12 moradores, temos:
$.5 + y + x + 1 = 12 => x + y = 6$

Somando as duas equações, temos:
$.2x = 4 => x = 2$
Então, y = 4

23) $.\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} => \begin{cases} a' + 2b' = 6 \\ -a' + b' = 12 \end{cases} e \begin{cases} c' + 2d' = 15 \\ -c' + d' = 18 \end{cases}$

Resolvendo o primeiro sistema, temos:
$.3b' = 18 => b' = 6 \; e \; a' = -6$
Resolvendo o segundo sistema, temos:
$.3d' = 33 => d' = 11 \; e \; c' = -7$
Logo, letra B

24) Podemos encontrar o número de samambaias a partir de:
$.0 . 8 + 1 . 12 + 2 . 7 + 3 . 16 + 4 . 14 + 5 . 6 + 6 . 3$
Esse cálculo representa a multiplicação da matriz transposta de A pela matriz B, assim, $A^t . B$, letra A.

25) $\log(1 + 1) = 0{,}3 => x = \log(2 + 3) = log5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = log10 - log2$
$.\log5 = \log10 - \log2 => log5 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, letra B.

26) $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
$.\begin{cases} a - b = 3 \\ b = 4 \end{cases} => a = 7$

Letra D.

27) Fazendo o produto entre as matrizes temos: $340 \,.\, 0{,}35 + 520 \,.\, 0{,}25 + 305 \,.\, 0{,}3 + 485 \,.\, 0{,}1 = 389\ mg$
Logo, letra A.

28) $Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4400 \\ 7100 \\ 8900 \end{pmatrix}$, logo, os custos são respectivamente 4400, 7100 e 8900, totalizando 81.700, letra C

29) Para calcular a média, devemos somar todas as notas e dividir por 4. Porém, podemos dividir todas as notas por 4 e depois somar, assim, basta multiplicarmos por uma matriz coluna com todos os elementos sendo $\frac{1}{4}$, assim, letra E.

30) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} => LM = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1), logo, letra\ B$

31) a) $2 \,.\, 10 - 4 \,.\, 3 = 20 - 12 = 8$

b) $-4 \,.\, 3 - 2 \,.\, (-1) = -12 + 2 = -10$

32) a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix} = 2 + 40 + 6 - 4 - 15 - 8 = 21$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 30 + 8 - 12 + 9 - 80 - 4 = -49$

33) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & x \\ -2 & x \\ 1 & -3 \end{matrix} = 0 => -x^2 - 4x + 12 - 2x - 12 - 2x^2 = 0$

$.-3x^2 - 6x = 0 => -3x(x + 2) = 0 => x = 0\ ou\ x = -2$

34) $\begin{vmatrix} sen(x) & cos^2(x) & 1 \\ sen(x) & \cos(x) & 0 \\ sen(x) & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} sen(x) & cos^2(x) \\ sen(x) & \cos(x) \\ sen(x) & 1 \end{matrix} =$

$.= sen(x).\cos(x) + sen(x) - cos^2(x).sen(x) - sen(x).\cos(x) =$
$.= sen(x) - \cos^2(x).\text{sen}(x) = \text{sem}(x) - \left(1 - \text{sem}^2(x)\right).\text{sen}(x) =$
$.= \text{sen}(x) - \text{sen}(x) + \text{sen}^3(x) = \text{sen}^3(x)$
Logo, letra D

35) $\begin{cases} x+y=480 \to \times(-6) \\ 6x+8y=3380 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x-6y=-2280 \\ 6x+8y=3380 \end{cases} \Rightarrow 2y=500 \Rightarrow \begin{cases} y=250 \\ x=480-250=230 \end{cases}$

36) Sendo x o número de acertos e y o número de erros, montando um sistema de equações, tem-se:

$\begin{cases} 20x-10y=100 \\ x+y=80 \end{cases} \Rightarrow 20x-10.(80-x)=100 \Rightarrow x=30$, letra A

37) A partir do esquema, temos:

$\begin{cases} y>x \Rightarrow y-x=4 \\ z>1 \Rightarrow x=z-1 \\ 15>z \Rightarrow y=15-z \end{cases} \Rightarrow (15-z)-(z-1)=4 \Rightarrow 15-z-z+1=4 \Rightarrow -2z=4-16 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=\dfrac{-12}{-2}=6 \Rightarrow \begin{cases} x=z-1=5 \\ y=15-6=9 \end{cases}$

38) Sendo T o tempo em que a luz vermelha fica acesa por ciclo, assim, temos que $T=\frac{3}{2}X$

Sendo Y o tempo total, temos:

$Y=5+X+\frac{3}{2}X \Rightarrow 5X-2Y+10=0$, letra B

39) Suponha "x" embalagens de 20 litros, "y" embalagens de 10 litros e "n" embalagens de 2 litros. Analisando os dados do problema, temos:

$\begin{cases} 20x+10y+2n=94 \quad (I) \\ 10x+6y+3n=65 \quad (II) \\ y=2x \quad (III) \end{cases}$

$\begin{cases} 20x+10.2x+2n=94 \\ 10x+6.2x+3n=65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40x+2n=94 \to (\times 3) \\ 22x+3n=65 \to (\times -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 120x+6n=282 \\ -44x-6n=-130 \end{cases} \Rightarrow 76x=152$

$\Rightarrow x=\dfrac{152}{76}=2.$

$Logo, 40x+2n=94 \Rightarrow 40(2)+2n=94 \Rightarrow 2n=94-80 \Rightarrow n=\dfrac{14}{2}=7 \to divisor\ de\ 77.$

Opção C

40) Considere x, y e z as quantidades de vezes que foram retirados, respectivamente, somente 1 copo, 2 copos juntos e 3 copos juntos. Se 35% de um total de 100 copos foram desperdiçados, então foram desperdiçados 35 copos e aproveitados 65 copos. Do total y de vezes que saíram 2 copos juntos, foram desperdiçados y copos e do total de z que saíram 3 copos juntos, foram desperdiçados 2z copos. Organizando as informações, temos:

$i)\begin{cases} y+2z=35 \\ \dfrac{y}{z}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow y=\dfrac{3z}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3z}{2}+2z=35 \Rightarrow 3z+4z=70 \Rightarrow 7z=70 \Rightarrow z=\dfrac{70}{7}=10$

$ii)\ y=\dfrac{3z}{2}=\dfrac{3(10)}{2}=\dfrac{30}{2}=15$

Foram aproveitados todos os copos das vezes que saíram somente 1, mas 1 copo de cada vez que saíram juntos 2 ou 3 copos juntos.

Assim, teremos $x + y.(1) + z.(1) = 65 \Rightarrow x = 65 - 15 - 10 = 65 - 25 = 40.$

Opção C

41) $Icad = \frac{TC+TA}{2}$

$.0,6 = \frac{TC+TA}{2} \Rightarrow 1,2 = \frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV}$

Podemos formar uma segunda relação a partir do dobro de NF, assim, teremos:

$.\frac{NV}{2F} + \frac{NA}{NV} = 2 \,.\, 0,5 \Rightarrow \frac{NV}{2F} + \frac{NA}{NV} = 1$

Subtraindo as duas equações, temos:

$.\frac{NV}{NF} - \frac{NV}{2NF} = 0,2 \Rightarrow \frac{NV}{NF} = 0,4 \Rightarrow NV = 0,4.NF$

Substituindo na primeira equação, temos:

$.1,2 = 0,4 + \frac{NA}{NV} \Rightarrow NA = 0,8 \,.\, NV = 0,8 \,.\, 0,4 \,.\, NF = 0,32 \,.\, NF.$

Como NA + NV = 3600 $\Rightarrow 0,32NF + 0,4NF = 3600 \Rightarrow NF = 5000.$

Opção C

42) i) B1 + B2 = b12; B1 + B3 = b13; B2 + B3 = b23

ii) Os valores das diagonais valem somas de valores de uma mesma barraca.

Como os valores pedidos referem-se a B1 e B2, montamos o sistema.

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 1800 \rightarrow \times(-1) \\ B_1 + B_3 = 3000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -B_1 - B_2 = -1800 \\ B_1 + B_3 = 3000 \end{cases} \Rightarrow B_3 - B_2 = 3000 - 1800 = 1200$$

A diferença mostra que B3 arrecadou 1200 reais a mais que a barraca B2.

43) $\begin{cases} Ana \rightarrow 3x + 7y + z = 42,1 \\ Beto \rightarrow 4x + 10y + z = 47,3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 21y + 3z = 126,30 \\ -8x - 20y - 2z = -94,60 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 31,70.$

Opção C

44) Considere F, P, F1 e F3, respectivamente os números totais de fotos, páginas, páginas com 1 foto e páginas com 3 fotos. De acordo com os critérios, temos:

$$\begin{cases} F = P + 50 \\ P = F_1 + F_3 \\ F = 1F_1 + 3F_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 + F_3 = P \rightarrow \times(-1) \\ 1F_1 + 3F_3 = P + 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -F_1 - F_3 = -P \\ F_1 + 3.F_3 = P + 50 \end{cases} \Rightarrow 2F_3 = 50 \Rightarrow F_3 = \frac{50}{2} = 25$$

Opção B

45) Retirando todas as flores não vermelhas, restam apenas as flores vermelhas, logo, 19. Já quando tiramos todas as flores vermelhas, restam apenas as flores não vermelhas, logo, 14. Sendo assim, o buquê terá 19 + 14 = 33 flores.
Retirando as rosas desse buquê, teremos 17 flores que não são rosas, logo, 16 são rosas.
Se retirarmos as rosas vermelhas desse buquê, teremos 26 flores, logo, 7 são rosas vermelhas.
Se 16 é o total de rosas e 7 delas são vermelhas, então 9 não são vermelhas.

Desafiando:

46) A dívida de cada amigo Aj é dado pela soma de todos os elementos da coluna j subtraindo a soma da linha i. Assim, para o amigo 4, teremos:

$.10 + 1 + 4 + 2 + 2 + 7 + 11 + 4 = 41 \rightarrow pegou$

$.5 + 2 + 10 + 4 + 5 + 5 = 31 \rightarrow emprestou$

Logo, ele ainda deve 10 reais.

Opção A

47) a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-t & 2 \\ 3 & 5-t \end{bmatrix}$

b) $(4-t)(5-t) - 6 = 0 => 20 - 4t - 5t + t^2 - 6 = 0 => t^2 - 9t + 14 = 0$
$.\Delta = 81 - 56 = 25 => t = \frac{9 \pm 5}{2} => t' = 7 \; e \; t'' = 2$

48) $\begin{cases} x + 2y + z = 20 \\ 4x + 2y + 3z = 42 \rightarrow L2 - 4L1 \\ 2x + 4y + z = 32 \rightarrow L3 - 2L1 \end{cases} => \begin{cases} x + 2y + z = 20 \\ -6y - z = -38 \\ -z = -8 \end{cases} => z = 8, \; y = 5 \; e \; x = 2 =>$

$.x + y + z = 15 \; reais$

Opção D

EM3MAT09

ORIENTADOR METODOLÓGICO

Lógica e problemas de raciocínio

Conteúdo:

- Questões de raciocínio;
- Noções de lógica.

Objetivos de aprendizagem:

- Elaborar um modelo que estruture o raciocínio de forma lógica, através de proposições;
- Utilizar conectivos para encadear proposições;
- Estabelecer a tabela-verdade para analisar a lógica matemática;
- Conhecer e aplicar conceitos de negação, equivalência e a estrutura condicional;
- Resolver problemas de lógica matemática e questões de raciocínio matemático simples.

Praticando:

1) Somando todos os pesos da balança é possível ver que 3 tijolos mais 3 sacos de areia pesam 105 kg, então dividindo por 3 esses pesos, temos que 1 tijolo mais 1 saco de areia pesam 35kg

2) Seja x a quantidade de anos passados desde hoje. Para as idades serem iguais temos a seguinte equação:

$$44 + x = 10 + x + 8 + x + 2 + x \rightarrow 44 + x = 20 + 3x \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = 12$$

Logo, como a idade de Maria será 44 + x = 44+ 12 = 56 anos.

3)

Primeiro folheto 1 selo de R$0,65

Segundo folheto 3 selos: 1 de R$0,65, 1 de R$0,60 e 1 de R$0,20

Ao postar 500 folhetos do segundo tipo serão gastos: 500.0,65+ 500.0,60 + 500.0,20 = 725

Então sobram 1000-725= 275 reais para serem gastos em folhetos do primeiro tipo, logo serão comprados 275:0,65= 423 selos.

Como foram usados 500 selos de R$0,65 no segundo folheto, no total foram usados

423+500 = 923 folhetos.

Gabarito: C

4)Como a cada três números consecutivos a soma deve ser 20, temos que os dois segundos quadrados devem somar 15. Logo, o quarto quadrado deve ser o número 5, o sexto o número 7, o sétimo o número 5 e o oitavo o número 8. Conforme o quadro abaixo:

5			5	8	7	5	8	X					

$\underbrace{\hspace{3em}}_{}$ 15

Como $5 + 8 + x = 20 \rightarrow x = 7$

Logo o algarismo representado por x é divisor de 49.

Gabarito: A

5)Como num ano há 12 meses, considerando 12 pessoas nascidas em cada um dos meses, para obter 4 pessoas nascidas em cada mês temos que 12x4 = 48 pessoas, logo a próxima pessoa escolhida fará ter pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês, portanto o grupo mínimo é 48+1 = 49.

Gabarito: D

6) Ao rotacionar a figura simetricamente em relação aos eixos x e y podemos notar que a figura que representa a nova figura é a opção E

7) A negação de $x \geq -2$ é x < - 2 .

Gabarito: C

8) Sejam as afirmações p: não chover (a negação de p é ~p : chover) e q: todos os bares estarão abertos (a negação de q é ~q: nem todos os bares estarão abertos). Como temos que $p \rightarrow q$, então vale $\sim q \rightarrow \sim p$, logo vale a afirmação: se algum bar não está aberto, então choveu. A afirmativa que mais se aproxima dessa sentença é a opção E.

Gabarito: E.

9) Sejam as afirmações p: ter vogal e q: ter número par temos que ~p: ter consoante e ~q: ter número ímpar. Sabendo que vale $p \rightarrow q$ temos que $\sim q \rightarrow \sim p$, ou seja, toda face que tem um número ímpar tem uma consoante na outra face. Portanto, basta verificar se o primeiro cartão possui um número par e se o ultimo cartão possui uma consoante.

Gabarito: E

10) Seja p: hoje é segunda-feira e q: amanhã não choverá temos que ~p: hoje não é segunda-feira e ~q = amanhã choverá. Como temos $p \wedge q$ sua negação é ~p$\vee$~q , ou seja, vale a afirmação: hoje não é segunda-feira ou amanhã choverá.

Gabarito: B

11) Se a opção C for verdadeira, temos que a opções A e B também são verdadeiras. Portanto, podemos descartar as opções A, B e C. Se a opção E for verdadeira, a opção D também é

verdadeira. Logo, devemos descartar a opção E. Com isso, podemos concluir que a opção correta é a opção D.

Aprofundando:

12) Sabendo que cada 5 gotas correspondem a 2kg, a cada 8 horas, temos que 30 gotas correspondem a (30:5)x2= 6x2 = 12kg.

Gabarito: A

13)Se X = 43, temos

1º procedimento: 43-1 = 42

2º procedimento: 42:3 = 14

3º procedimento: 14-1= 13

4º procedimento: 13-1 = 12

5º procedimento: 12:3 = 4

6º procedimento: 4-1 = 3

7º procedimento: 3:3 = 1

Logo, o número de vezes que os procedimentos são utilizados é igual a 7.

Gabarito: A

14) Com a balança equilibrada é possível dividir o pacote de 24kg em dois de 12kg.

Gabarito: E

15) Na primeira pesagem podem ser obtidos pacotes de 12kg. Já na segunda pesagem podem ser obtidos pacotes de 6kg ao dividir um de 12kg. Com isso, podem ser formados pacotes de 12kg, 6kg, e 18kg ao somar os dois primeiros.

Gabarito: C

16) R$20 – $1m^2$ - tela

R$15 – 1m de moldura

Na primeira encomenda temos que:

A área correspondente a 8 telas será:

25cm x 50 cm x 8 = 0,25m x 0,5 m x 8 = $1m^2$

Logo será gasto 20.1 = 20 reais em tela.

A quantidade de metro linear para a moldura será:

8x(25cm + 25cm + 50cm + 50cm) = 8x150cm = 8x1,5m = 12m,

Logo será gasto 12x15= 180 reais em moldura.

Portanto, a encomenda 1 custará no total 20+180 +10 = 200 reais, considerando a taxa de entrega.

Na segunda encomenda temos que:

A área correspondente as 8 telas será:

8x50cmx100cm = 8x0,5mx1m= $4m^2$

Logo, será gasto 4.20 = 80 reais em tela.

A quantidade de metro linear para moldura será:

8x(50cm + 50cm + 100cm + 100cm) = 8x300cm = 8x3m = 24m

Logo, será gasto 24x15 = 360 reais em moldura.

Portanto, a encomenda 2 custará no total 80 + 360 +10 = 460 reais, considerando a taxa de entrega.

Analisando as opções podemos notar que a opção correta é a opçãoB.

17) Ao somar os algarismos de 1 a 9, temos que S = 1+2+3+4+5+6+7+8+9= 45. No entanto, ao considerar a soma dos algarismos nos lados do triângulo, os algarismos 7, 8 e 9 são contados duas vezes, cada um. Portanto a soma total dos algarismos dos lados do triângulo será S_T =45 + 8+9+7 = 69.

Logo, como a soma em cada lado deve ser a mesma, 69:3 = 23 é a soma de cada lado.
Opção C

18) Considerando que o primeiro salto atinja um alcance x, temos que os saltos seguintes serão x – 1,2 e x – 1,2 – 1,5 = x- 2,7. Logo, como o atleta deseja atingir 17,4m temos que

$x + x - 1,2 + x - 2,7 = 17,4 \rightarrow 3x = 21,3 \rightarrow x = 7,1$ m.

Gabarito: D

19) Analisando o texto temos as seguintes equivalências:

Marte = 3 mercúrios

Terra = 7 martes

Netuno = 58 terras

Júpiter = 23 Netunos

Logo, Júpiter = 23x(58 terras) = 1334 terras

Gabarito: B

20)Considerando a data de nascimento 16/05/1963 e seguindo os procedimentos temos que:

I) D=16; M = 05 e A= 1963

II) Até o inicio do mês de maio, temos 31+28+31 +30 = 120 dias, logo até o dia 16 de maio temos N = 120 + 16 = 136 dias

III) Como $\frac{A-1}{4} = \frac{1962}{4} = 490{,}5 \to Y = 490$

IV) $S = A + N + Y = 1963 + 136 + 490 = 2589$

V) Como $S = Divisor . Quociente + Resto,$ temos que $2589 = 7.369 + x \ \to x = 3$

Logo, o dia da semana é segunda-feira.

Opção D

21) Até o dia 1º de junho há 31+28+31+30+31= 151 dias, logo nesse período poderão ser realizadas 151: 4 ≅ 37 viagens. Já no período de 10 de junho em diante, temos que haverá 20+31+31+30+31+30+31= 204 dias, logo nesse período poderão ser realizadas 204:4 =51 viagens. Então em um ano, o número máximo de viagens que o maquinista poderá realizar será 37+51 = 88

Gabarito: C

22)Os pontos A e B ao fazer movimentos de subida e descida fazendo trajetórias de arcos de circunferência de mesmo centro, no ponto central da gangorra, ou seja, o pivô. Portanto, a projeção ortogonal dessas trajetórias no plano do chão são dois segmentos de reta na horizontal, conforme apresentados na alternativa B

Gabarito: B

23) Analisando a figura, podemos observar que a altura mínima e máxima acessível ao cadeirante são, respectivamente, 0,4m e 1,35m. Assim, as tomadas e interruptores devem ser instalados em uma altura (h) entre esses valores, isto é, de forma que 0,4≤h ≤1,35m. Analisando as alternativas, somente a alternativa E apresenta valores completamente dentro destes limites.

Gabarito: E

24) Como é retirado de cada frasco a quantidade de comprimidos referente a sua numeração, serão retirados $1 + 2 + 3 \ldots + 14 + 15 = (1 + 15).\frac{15}{2} = 120$comprimidos. Considerando a massa correta dos comprimidos, deveríamos ter 20x120= 2400mg de comprimidos. Como foi encontrado 2540mg, podemos concluir que 2540mg – 2400mg = 140mg corresponde a massa a mais de cada comprimido alterado. Logo, como no frasco procurado cada comprimido tem 30mg de massa, o valor a mais em relação a um comprimido normal é 30mg-20mg=10mg. Então 10n=140, logo n = 14.

Gabarito: C

25) A afirmação $x \in (A \cup B)$ é equivalente a $x \in A$ ou $x \in B$ logo a negação dessa afirmação será $x \notin A$ e $x \notin B$

Gabarito: E

26) Seja V = fala a verdade e M= fala mentira, podemos perceber que

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Raul	V	V	M	M	M	V	V
Cida	M	M	V	V	V	V	M

Analisando a tabela acima, na afirmação "amanhã é dia de mentir":

se Raul disse a verdade, então "amanhã" pode ser: quarta, ou seja, hoje é terça. Já se Raul mentiu, então "amanhã" pode ser: sábado, logo hoje é sexta.

Já se Cida disse a verdade, então "amanhã" pode ser: sábado, logo hoje é sexta; se Cida mentiu, amanhã pode ser: quarta, logo hoje é terça.

Em relação aos possíveis dias:

Se hoje é sexta, Raul mentiu e Cida disse a verdade, logo temos uma contradição com a afirmação. Pois se Raul mentiu "amanhã" deveria ser dia de dizer a verdade, mas pela afirmação "amanhã" é dia de mentir.

Se hoje é terça, Raul disse a verdade e Cida mentiu logo não temos contradição com a afirmação.

Logo o dia em que a afirmação foi feita é terça-feira.

Gabarito: A

27) Sejam p e q afirmações tais que p: Lucas mentiu e q: é culpado, temos que $p \rightarrow q$ logo $\sim q \rightarrow \sim p$, então temos a afirmação: Se Lucas não é culpado, então ele não mentiu.

Gabarito: A

28) Sejam as afirmações p: ter vogal e q: ter número par temos que ~p: ter consoante e ~q: ter número ímpar. Sabendo que vale $p \to q$ temos que $\sim q \to \sim p$, ou seja, toda face que tem um número ímpar tem uma consoante na outra face. Logo, basta verificar os cartões I e III.

Gabarito: D

29)Considerando as incógnitas:

x → número de manhãs com chuva

y → número de tardes com chuva

z → número de dias sem chuva

Podemos perceber que n = x+y+ z .

Temos que $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 5 \\ y + z = 6 \end{cases} \to 2x + 2y + 2z = 18 \to x + y + z = 9 \to n = 9$

Gabarito: B

30) Analisando as afirmações podemos perceber que a frase III entra em contradição, pois se ela for verdadeira o neto deveria viajar imediatamente, contradizendo a frase. E se for falsa, o neto só viajaria no final do ano, o que contradiz novamente a frase. Logo, não é possível determinar a época de viagem do neto III.

Gabarito: C

31) A negação da afirmação VI) Todos os homens são bons motoristas é a afirmação

Ao menos um homem não é bom motorista. Logo a opção que mais se aproxima dessa frase é a opção V.

Gabarito: E

Desafiando:

32) Como o resultado de cada time foi acertado por pelo menos dois comentaristas, ao analisar as tabelas podemos perceber que:

Time 1: Derrota

Time 2: Derrota

Time 3: Vitória

Time 4: Derrota

Time 5: Vitória

Logo, $N_A = 4$; $N_B = 4$ e $N_C = 3$, portanto $N_A = N_B > N_C$

Gabarito: C

33) Temos que as implicações:

Beto brigar com Gloria → Gloria ir no cinema

Gloria ir no cinema → Carla fica em casa

Carla ficar em casa → Raul brigar com Carla

Se Raul não brigar com Carla, então significa que todas as outras implicações são falsas. Logo, Carla não fica em casa e Beto não briga com Gloria.

Gabarito: A